

DIE BOGGIO-FORMEL FÜR POLYHARMONISCHE DIRICHLET-PROBLEME

An der Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
angefertigte

BACHELORARBEIT

vorgelegt von
BENJAMIN HIMMEL
geboren am 27.11.1987 in Aschersleben,
Studiengang Mathematik,
Studienrichtung Mathematik.

17. Juni 2019

Betreut am Institut für Analysis und Numerik von
PROF. DR. HANS-CHRISTOPH GRUNAU

1 Einleitung

Es geht um das Lösen von linearen elliptischen Dirichlet-Problemen der Gestalt:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{im Gebiet } \Omega, \\ D^\alpha u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq m - 1.$$

Im Fall $m = 1$ handelt es sich um die Poisson-Gleichung, die beispielsweise für das elektrische Potenzial einer Punktladung bedeutsam ist.

Der Fall $m = 2$ ist von Nutzen, das Verhalten einer eingespannten Platte zu modellieren.

Eine - auf der Herleitung starker a-priori-Abschätzungen aufbauende - Theorie für sehr allgemeine elliptische Systeme in Hölder- und Sobolev-Räumen wurde in den 1950'er und 1960'er Jahren von S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg ausgearbeitet [ADN(i)], [ADN(ii)]. Die Behandlung allgemeiner Gebiete lässt sich durch lokales Geradebiegen des Randes lokal auf die Behandlung handhabbarer Gebiete zurückführen. Es wird von Poisson-Kernen gebraucht gemacht. Eine weitere Methodik besteht darin mittels einer Greenschen Funktion, bezüglich spezieller Gebiete, eine schwache Lösung zu konstruieren und nachzuweisen, dass es sich bei dieser sogar um eine Lösung im klassischen Sinne handelt - das ist Gegenstand der Regularitätstheorie.

Als allgemeine Lösungsstrategie ist das ungeeignet, weil sich das Auffinden einer Greenschen Funktion bezüglich allgemeinen elliptischen Operatoren und Gebieten als zu anspruchsvoll erweist.

Vom Italienischen Mathematiker Tommaso Boggio stammt eine grundlegende Arbeit [Bo], aus dem Jahre 1905, in welcher er eine explizite Darstellung einer Greenschen Funktion für den polyharmonischen Operator $(-\Delta)^m$, mit $m \in \mathbb{N}$, und dem Gebiet der Einheits-Kugel $B := B_1(0)$ beschreibt. Deshalb wird diese Darstellung heute als Boggio-Formel bezeichnet. Diese Greensche Funktion erweist sich sogar als eindeutig.

Zu seiner Zeit waren das Konzept der Kelvin-Transformierten und dass für bzgl. \mathbb{R}^3 die konformen Abbildungen stets eingeschränkte Möbiustransformationen sind (Satz von Liouville, vgl. §2) bereits bekannt, sodass er im Prinzip die Werkzeuge hatte, sich systematisch Zugang zur Gestalt der Formel zu verschaffen.

Ein für diesen Kontext sehr bedeutsames Resultat ist die konforme Kovarianz (vgl. §5) für Kelvin-Transformierte, was gestattet, den nicht-radialsymmetrische Fall auf den radialsymmetrische Fall zurückzuführen.

Meine Arbeit basiert im wesentlichen auf dem Werk von [DG], wo die Boggio-Formel weitergehend für reelle Exponenten $m > 0$ hergeleitet wird. Daran konnte ich insbesondere §6 anlehnen. Weiterhin habe ich stark von den Resultaten zu Kelvin-Transformierten aus [ADFJS] profitiert, die §5 zur konformen Kovarianz bestimmen.

Den wesentlichen Anteil meiner Eigenleistung sehe ich in der Ausarbeitung von §4. Dort zeige ich, dass es sich bei der Fundamentallösung von $(-\Delta)^m$ - laut [GGs, section 2.6] - auch tatsächlich um eine solche handelt. Die Herleitung einer - zur Boggio-Formel analogen - Greenschen Funktion von $(-\Delta)^m$ für den Halbraum (\mathbb{R}_+^n) in §7 stammt zudem auch von mir, beruht jedoch darauf dass die entsprechende Formel in [GGs, section 2.6] bereits gegeben ist. Dazu habe ich noch §3 über Glattheit der Boggio-Formel ohne Input anderer Arbeiten bearbeitet.

Hauptsatz 1.

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C_0^\infty(B)$. Setze:

$$u(x) := \int_B G_m(x, y) f(y) dy \quad \text{für } x \in B,$$

wobei wir gemäß Boggio setzen:

$$G_m(x, y) := k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{|x|y - \frac{x}{|x|}|/|x-y|} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv,$$

mit $k_{m,n} := \frac{1}{n e_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2}$, und $e_n := \text{vol}(B) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$.

Dann ist $u \in C^\infty(\bar{B})$ und u ist die eindeutig bestimmte Lösung von:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u = 0 & \text{auf } \partial B, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq m-1. \end{cases} \quad (1)$$

Daher heißt G_m die Greensche Funktion zum Dirichletproblem des polyharmonischen Operators.

2 Konforme Abbildungen des \mathbb{R}^n

Dieser Abschnitt ist für den Beweis von Hauptsatz 1 nicht erforderlich, aber dient dem allgemeineren Verständnis. Er handelt von der etwas überraschenden Begebenheit, dass im \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ die konformen Abbildungen stets eingeschränkte Möbiustransformationen sind.

Für den Fall $n = 3$ hat das Joseph Liouville [Liou] bereits im Jahre 1850 bewiesen. Zu seinen Ehren trägt das allgemeinere Resultat ebenfalls die Bezeichnung Satz von Liouville. Verglichen dazu sind alle konformen Abbildungen im \mathbb{R}^2 genau die holomorphen und antiholomorphen Funktionen mit nicht verschwindender Jacobi-Matrix.

(Fordert man neben der lokalen Winkeltreue auch lokale Orientierungstreue, dann nur die holomorphen Funktionen mit nicht verschwindender Jacobi-Matrix).

Hier wird der Beweis von Nevanlinna [Ne] für konforme Abbildungen aus C^4 präsentiert - entnommen aus *Inversion Theory and Conformal Mapping* von Blair [Bl, section 5].

Ein Beweis für konforme Abbildungen aus C^1 stammt von Hartman [Ha] - würde hier allerdings den Rahmen sprengen. Zur Etablierung der Begrifflichkeiten kommen zunächst einige Definitionen und Bemerkungen nach Reshetnyak [Re, chapter I, §3].

Definition 2. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, $f \in C^1(U)$. f heißt *konform* in $x \in U$, falls:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \quad \det(D_x f) \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle}{|D_x f \circ v| |D_x f \circ w|} = \frac{\langle v, w \rangle}{|v| |w|}.$$

Ist f überdies konform für jedes $x \in U$, dann nennt man f eine *konforme Abbildung*.

Bemerkung 3. Äquivalent ließe sich definieren, dass $\forall x \in U, \exists \lambda > 0$ mit $D_x f \in \lambda O(n)$. Insbesondere sind konforme Abbildungen lokal injektiv. Es gilt lokale Winkeltreue, d.h. der Winkel zwischen zwei Kurven in U , welche durch $x \in U$ verlaufen, entspricht betragsmäßig dem Winkel zwischen den Bildkurven, die sich im Bild von x schneiden.

Lokale Orientierungstreue gilt zusätzlich, falls die Jacobi-Matrix ein positives Vielfaches einer orthogonalen Matrix mit Determinante gleich 1 ist, d.h. $\exists \lambda > 0$ mit $D_x f \in \lambda SO(n)$.

Möbiustransformationen in $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ werden als gebrochen lineare Funktionen definiert: $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ mit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, wobei $f(\infty) = \frac{a}{c}$ sowie $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, falls $c \neq 0$ ist, und $f(\infty) = \infty$, falls $c = 0$ ist.

Ein bekanntes Resultat der Funktionentheorie besagt, dass sich jede Möbiustransformation als Komposition von Drehstreckungen, $z \mapsto \frac{1}{z}$ (Inversion an \mathbb{S}_1^1 mit Spiegelung an der reellen Achse) und Translationen darstellen lässt. Diese sind für sich genommen spezielle konforme Abbildungen, die bei Automorphismusgruppen von Kreisen, Halbebenen oder von ganz \mathbb{C} bzw. $\bar{\mathbb{C}}$ eine entscheidende Rolle spielen. Andererseits sind alle Verkettungen dieser speziellen Möbiustransformationen wieder Möbiustransformationen, sodass sich eine äquivalente Definition ergibt, die sich auf $\bar{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ verallgemeinern lässt.

Definition 4. Eine *Inversion bezüglich einer Sphäre* $\mathbb{S}_r^{n-1}(x_0)$ ist eine Abbildung

$$j : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n \text{ mit } j(x) = r^2 \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|^2} + x_0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \text{ und } j(\infty) = x_0 \text{ sowie } j(x_0) = \infty .$$

Eine *Ähnlichkeitstransformation* ist eine affine Abbildung $\phi : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ mit

$$\phi(x) = \lambda A \circ x + c \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \phi(\infty) = \infty, \text{ wobei } A \in O(n), c \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda > 0.$$

Drehstreckungen, Spiegelungen und Translationen sind z.B. Ähnlichkeitstransformationen.

Definition 5. Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ heißt *Möbiustransformation*, wenn sie sich als endliche Kompositionen von Inversionen und Ähnlichkeitstransformationen darstellen lässt.

Beweise für die nachfolgenden Bemerkungen findet man in [Re, 35-39].

Bemerkung 6. Eine Möbiustransformation f ist konform in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$. Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe. Jede Möbiustransformation f ist entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder besitzt die Darstellung $f = \phi_1 \circ j \circ \phi_2$, wobei es sich bei ϕ_1, ϕ_2 um Ähnlichkeitstransformationen und bei j um die Inversion bezüglich \mathbb{S}_1^{n-1} handelt (corollary 4, p.39).

Hilfssatz 7. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, $f \in C^1(U)$ und $\forall x \in U$ sei $\det(D_x f) \neq 0$. f ist konform genau dann, wenn es ein $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle Df \circ v, Df \circ w \rangle = e^{2\sigma} \langle v, w \rangle. \quad \text{Zudem ist } e^\sigma = \frac{|Df \circ v|}{|v|} \text{ für beliebiges } v \neq 0.$$

Man nennt $e^{\sigma(\cdot)}$ die *charakteristische Funktion* der konformen Abbildung f .

Beweis. Hilfssatz und Beweis sind übernommen aus [Bl, theorem 3.7/ 3.8, p.72-74].

" \Rightarrow ": Es gilt die lokale Winkeltreue. Es wird gezeigt, dass $\exists \alpha(x) \in \mathbb{R}$ mit $\langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle = \alpha(x) \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Winkeltreue garantiert $\alpha(x) > 0$. Dann verbleibt nur $\sigma(x) := \frac{1}{2} \log(\alpha(x))$ zu setzen. Dazu betrachte $B(v, w) := \langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle$ als symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Die Winkeltreue bewirkt $B(v, w) = 0$, falls $\langle v, w \rangle = 0$. Damit wiederum und für beliebiges, aber festes $v \neq 0$ definiere eine Linearform auf \mathbb{R}^n :

$$L(w) := B(v, w) - \frac{B(v, v)}{\langle v, v \rangle} \langle v, w \rangle$$

Ergänzt man nun $v := b_1$ zu einer Orthogonalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$, so ist $L(b_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Aufgrund der Linearität ist L damit identisch Null. Für alle Paare $v, w \neq 0$ gilt somit:

$$B(v, w) = \frac{B(v, v)}{\langle v, v \rangle} \langle v, w \rangle \quad \text{und} \quad B(w, v) = \frac{B(w, w)}{\langle w, w \rangle} \langle w, v \rangle.$$

Daraus erhält man zusammen mit der Symmetrie von B und vom Skalarprodukt, dass:

$$\frac{B(v, v)}{\langle v, v \rangle} = \frac{B(w, w)}{\langle w, w \rangle} \quad \forall v, w \neq 0 \text{ mit } \langle v, w \rangle \neq 0. \text{ Diese Konstante bezeichne nun mit } \alpha(x).$$

Für alle Paare mit $\langle v, w \rangle = 0$ ist $\langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle = 0$, sodass $\alpha(x)$ auch hier legitim ist.

" \Leftarrow ": Wegen $\langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle = e^{2\sigma(x)} \langle v, w \rangle$, ergibt sich $|D_x f \circ v| = e^{\sigma(x)} |v|$. Also folgt:

$$\frac{\langle D_x f \circ v, D_x f \circ w \rangle}{|D_x f \circ v| |D_x f \circ w|} = \frac{e^{2\sigma(x)} \langle v, w \rangle}{e^{\sigma(x)} |v| e^{\sigma(x)} |w|} = \frac{\langle v, w \rangle}{|v| |w|}, \quad \forall x \in U.$$

□

Bemerkung 8. Mit Hilfe dieser äquivalenten Charakterisierung einer konformen Abbildung und der mehrdimensionalen Kettenregel lässt sich mühelos zeigen, dass eine Komposition konformer Abbildungen wieder konform ist. Die charakteristische Funktion der Komposition ergibt sich dabei als Produkt der charakteristischen Funktionen.

Für eine Abbildung $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet im Folgenden für $l = 1, \dots, n$: $[v^T \circ D^2 f(x) \circ u]_l := v^T \circ (D^2 f_l)(x) \circ u$ bzw. verkürzt $[v^T \circ D^2 f \circ u]_l := v^T \circ D^2 f_l \circ u$.

Der nächste Hilfssatz aus [Bl] verwendet ursprünglich als Voraussetzung, dass die Funktion auf einer offenen Teilmenge definiert ist. Nach meiner Analyse benötigt man stattdessen ein Gebiet, damit der Beweis korrekt ist.

Hilfssatz 9. Seien $n \geq 3$, $U \in \mathbb{R}^n$ ein nicht leeres Gebiet, sowie $f \in C^4(U)$ konform mit der charakteristischen Funktion $e^{\sigma(\cdot)}$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$v^T \circ D^2(e^{-\sigma}) \circ w = \beta \langle v, w \rangle.$$

Beweis. Hilfssatz und Beweis sind im Wesentlichen wie bei [Bl, lemma 5.1, p.88-89].

Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n . Laut *Hilfssatz 7* gilt:

$$\langle Df \circ v^i, Df \circ v^j \rangle = e^{2\sigma} \langle v^i, v^j \rangle \Leftrightarrow \langle e^{-\sigma} Df \circ v^i, e^{-\sigma} Df \circ v^j \rangle = \langle v^i, v^j \rangle = \delta_{ij}.$$

Demzufolge ist $M := \{e^{-\sigma} Df \circ v^1, \dots, e^{-\sigma} Df \circ v^n\}$ auch eine ONB, für festes $x \in U$.
Man beobachtet: $\langle Df \circ v^j, (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^k \rangle + \langle Df \circ v^i, (v^j)^T \circ D^2 f \circ v^k \rangle$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^n (\nabla f_l \circ v^j) ((v^i)^T \circ D^2 f_l \circ v^k) + (\nabla f_l \circ v^i) ((v^j)^T \circ D^2 f_l \circ v^k) \\ &= \sum_{l,r,s,t=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_r} v_r^j \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_s \partial x_t} v_s^i v_t^k + \sum_{l,r,s,t=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_s} v_s^i \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_r \partial x_t} v_r^j v_t^k \\ &= \sum_{r,s,t=1}^n \frac{\partial}{\partial x_t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_s} v_s^i, \frac{\partial f}{\partial x_r} v_r^j \right\rangle v_t^k = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial x_t} \langle Df \circ v^i, Df \circ v^j \rangle v_t^k \\ &= \langle \nabla \langle Df \circ v^i, Df \circ v^j \rangle, v^k \rangle \stackrel{\text{Hilfssatz 7}}{=} \langle \nabla (e^{2\sigma} \langle v^i, v^j \rangle), v^k \rangle \\ &= 2e^{2\sigma} \langle v^i, v^j \rangle \langle \nabla \sigma, v^k \rangle = 2e^{2\sigma} \langle \nabla \sigma, v^k \rangle \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Zyklische Vertauschung von i, j, k liefert dazu:

$$\langle Df \circ v^k, (v^j)^T \circ D^2 f \circ v^i \rangle + \langle Df \circ v^j, (v^k)^T \circ D^2 f \circ v^i \rangle = 2e^{2\sigma} \langle \nabla \sigma, v^i \rangle \delta_{jk},$$

$$\langle Df \circ v^i, (v^k)^T \circ D^2 f \circ v^j \rangle + \langle Df \circ v^k, (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j \rangle = 2e^{2\sigma} \langle \nabla \sigma, v^j \rangle \delta_{ik}.$$

Addiert man die letzten beiden Gleichungen und subtrahiert davon die Erste, kommt man auf:

$$\langle Df \circ v^k, (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j \rangle = e^{2\sigma(x)} (\langle \nabla \sigma(x), v^i \rangle \delta_{jk} + \langle \nabla \sigma(x), v^j \rangle \delta_{ik} - \langle \nabla \sigma(x), v^k \rangle \delta_{ij}),$$

und weil es sich bei M , für $x \in U$, um eine Orthonormalbasis handelt, ergibt sich weiterhin:

$$\begin{aligned} (*) \quad (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j &= \sum_{k=1}^n \langle (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j, e^{-\sigma} Df \circ v^k \rangle e^{-\sigma} Df \circ v^k \\ &= \begin{cases} \langle \nabla \sigma(x), v^j \rangle Df \circ v^i + \langle \nabla \sigma(x), v^i \rangle Df \circ v^j, & \text{für } i \neq j \\ \langle \nabla \sigma(x), v^i \rangle Df \circ v^i - \sum_{k \neq i} \langle \nabla \sigma(x), v^k \rangle Df \circ v^k, & \text{für } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Das Zwischenresultat $(*)$ wird für den Beweis von *Satz 12* nochmal eine Rolle spielen.

Für $i \neq j$ folgt: $e^{-\sigma} (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j + \langle \nabla(e^{-\sigma}), v^j \rangle Df \circ v^i + \langle \nabla(e^{-\sigma}), v^i \rangle Df \circ v^j = 0_n$.

Für paarweise verschiedene v^i, v^j, v^k - hier wird $n \geq 3$ relevant - erhält man daraus:

$$\begin{aligned} 0_n &= \sum_{t=1}^n v_t^k \frac{\partial}{\partial x_t} \left(e^{-\sigma} (v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j + \sum_{l=1}^n \left(\langle \nabla(e^{-\sigma}), v^j \rangle \frac{\partial f}{\partial x_l} v_l^i + \langle \nabla(e^{-\sigma}), v^i \rangle \frac{\partial f}{\partial x_l} v_l^j \right) \right) \\ &= \sum_{s,t,r=1}^n \left(v_t^k \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_t} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} v_s^i v_r^j + v_t^k e^{-\sigma} \frac{\partial^3 f}{\partial x_t \partial x_s \partial x_r} v_s^i v_r^j + v_t^k \frac{\partial^2(e^{-\sigma})}{\partial x_t \partial x_r} v_r^j \frac{\partial f}{\partial x_s} v_s^i \right. \\ &\quad \left. + v_t^k \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_r} v_r^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s} v_s^i + v_t^k \frac{\partial^2(e^{-\sigma})}{\partial x_t \partial x_s} v_s^i \frac{\partial f}{\partial x_r} v_r^j + v_t^k \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_s} v_s^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_r} v_r^j \right). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite ist jeweils die Summe über den zweiten, vierten und fünften Term sowie die Summe über den ersten mit den sechsten Term zusammen symmetrisch bezüglich i und k . Für die linke Seite ist das trivialerweise erfüllt. Somit muss die Summe über den dritten Term ebenfalls symmetrisch bezüglich i und k sein:

$$\left((v^k)^T \circ D^2(e^{-\sigma}) \circ v^j \right) Df \circ v^i = \left((v^i)^T \circ D^2(e^{-\sigma}) \circ v^j \right) Df \circ v^k \quad \text{für } i, j, k \text{ p.w. verschieden.}$$

Also ist $(v^i)^T \circ D^2(e^{-\sigma}) \circ v^j = 0$ für $i \neq j$, denn $\{Df \circ v^1, \dots, Df \circ v^n\}$ ist eine Orthogonalbasis. Da $\{v^1, \dots, v^n\}$ eine beliebige Orthonormalbasis ist, gilt für die symmetrische Bilinearform $B(v, w) := v^T \circ D_x^2(e^{-\sigma}) \circ w = 0$, falls $\langle v, w \rangle = 0$, für festes $x \in U$.

Wie im Beweis zu *Hilfssatz 7* folgt daraus, dass $\exists \beta(x) \in \mathbb{R}$ mit $v^T \circ D_x^2(e^{-\sigma}) \circ w = \beta(x) \langle v, w \rangle$. Zum Nachweis der Konstanz von β erkenne die Symmetrie zwischen u und v im Ausdruck:

$$\sum_{r=1}^n u_r \frac{\partial \beta}{\partial x_r} \langle v, w \rangle = \sum_{r=1}^n u_r \frac{\partial}{\partial x_r} (v^T \circ D_x^2(e^{-\sigma}) \circ w) = \sum_{r,s,t=1}^n \frac{\partial^3(e^{-\sigma})}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t} u_r v_s w_t$$

An dieser Stelle wird benötigt, dass $f \in C^4$, weil $e^{-\sigma} = \frac{|v|}{|Df \circ v|}$ für beliebiges $v \neq 0$. Vertauscht man nun u mit v erhält man $\langle \nabla \beta, u \rangle \langle v, w \rangle = \langle \nabla \beta, v \rangle \langle u, w \rangle$ und folglich $\langle \langle \nabla \beta, u \rangle v - \langle \nabla \beta, v \rangle u, w \rangle = 0$, für alle $w \in \mathbb{R}^n$, insbesondere für die kanonischen Einheitsvektoren. Folglich gilt $\langle \nabla \beta, u \rangle v - \langle \nabla \beta, v \rangle u = 0_n$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$, insbesondere wieder für alle kanonischen Einheitsvektoren. Schließlich ist $\nabla \beta = 0$ auf U und damit β unabhängig von x , weil es sich bei U um ein Gebiet handelt. \square

Definition 10. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert ein Polynom $q(x, y) = \sum_{j=1}^d P_j(x) y^j$, wobei die P_j Polynome sind, sodass $q(x, f(x)) = 0$ auf D , so heißt f eine *algebraische Funktion*. Andernfalls nennt man f eine *transzendente Funktion*.

Bemerkung 11. Der Artikel von R. W. Hamming liefert einen prägnanten Überblick zu den transzendenten Funktionen und eine Beweisskizze zur Transzendenz trigonometrischer Funktionen [Ham, p.296]. Insbesondere für den Arkustangens wird dieses Resultat benötigt für Satz 12. Zudem ist auch zu lesen, dass jede endliche Kombination von Additionen, Subtraktionen, Produkten, Quotienten und dem Radizieren mit rationalen Exponenten von algebraischen Funktionen wieder eine algebraische Funktion erzeugt [Ham, p.295-296].

Satz 12. Seien $n \geq 3$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leeres Gebiet, sowie $f \in C^4(U)$ konform. Dann ist f die Einschränkung einer Möbiustransformation auf U .

Beweis. Der Satz und der Beweis sind im Wesentlichen wie bei [Bl, theorem 5.5 p.89-91].

Laut dem vorherigen Hilfssatz gibt es eine Konstante β , sodass $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_i} v_i \right) w_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2(e^{-\sigma})}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j = \beta \sum_{j=1}^n v_j w_j.$$

Ersetzt man w durch die kanonischen Einheitsvektoren, folgt $\forall j = 1, \dots, n$ und $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_i} v_i \right) = \beta v_j \text{ somit } \sum_{i=1}^n \frac{\partial(e^{-\sigma})}{\partial x_i} v_i = \sum_{i=1}^n \beta v_i x_i + c(v), \text{ weil } U \text{ ein Gebiet ist.}$$

Ersetzt man v durch die kanonischen Einheitsvektoren, folgt $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial x_i} = \beta(x_i - x_i^0), \text{ wobei } x_i^0 := -c_i(e_i)/\beta \text{ falls } \beta \neq 0.$$

Also für $a := \frac{\beta}{2}$, und geeignetes $b \in \mathbb{R} : e^{-\sigma(x)} = a|x - x^0|^2 + b$.

Da die Jacobi-Matrizen von f in allen Punkten regulär sind, existiert nach dem *Satz von der Inversen Funktion* die Umkehrabbildung $f^{-1} \in C^1(f(U))$, und $f(U)$ ist offen, weil f^{-1} stetig ist. Weiterhin wegen Konformität von f gilt für jedes $y \in f(U)$ mit $y = f(x)$:

$$\langle v, w \rangle = \langle D_x f \circ (D_y f^{-1} \circ v), D_x f \circ (D_y f^{-1} \circ w) \rangle = e^{2\sigma(x)} \langle D_y f^{-1} \circ v, D_y f^{-1} \circ w \rangle,$$

also $\langle D_y f^{-1} \circ v, D_y f^{-1} \circ w \rangle = e^{-2\sigma(f^{-1}(y))} \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\forall y \in f(U)$.

Damit handelt es sich nach *Hilfssatz 7* auch bei f^{-1} um eine konforme Abbildung mit $e^{-\sigma \circ f^{-1}}$ als charakteristischer Funktion. Analog gibt es deswegen Konstanten c, d und $y^0 \in \mathbb{R}^n$, sodass:

$$e^{\sigma(x)} = e^{-(-\sigma \circ f^{-1})(y)} = c|y - y^0|^2 + d.$$

Daher gilt: $1 = (a|x - x^0|^2 + b)(c|y - y^0|^2 + d)$ für alle $x \in U$ und $y = f(x)$. (**)

Für $a \neq 0$ und festes $x \in U$ mit $|x - x^0| = r$ und $|f(x) - y^0| = R$, gibt es auch Punkte aus \bar{U} mit Abstand $r + \varepsilon$ von x^0 , für ein $\varepsilon > 0$, denn U ist offen. Demzufolge kann der zweite Faktor nicht konstant sein und es muss $c \neq 0$ gelten. Es gibt weitere Punkte mit Abstand r zu x^0 , da U offen ist. Für Punkte aus $U \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(x^0)$ ist der erste Faktor konstant. Das impliziert die Konstanz des zweiten Faktors sowie $f(U \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(x^0)) \subseteq f(U) \cap \mathbb{S}_R^{n-1}(y^0)$.

Weil f stetig ist und $U, f(U)$ jeweils offen sind, existieren $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und ein Richtungsvektor $e \in \mathbb{S}_1^{n-1}(0)$, sodass für $t \in [t_1, t_2]$ die Spur der Kurve $x(t) = te + x^0$ in U sowie das Bild dieser Spur $y(t) = f(x(t))$ in $f(U)$ verlaufen. Weil nun die Spur von $x(\cdot)$ senkrecht zu Sphären um x^0 verläuft, f Abschnitte von Sphären wieder wegen (**) in Sphären abbildet

und lokal winkeltreu ist, verläuft die Spur von $y(\cdot)$ senkrecht zu Sphären um y^0 . Die Spur von $y(\cdot)$ ist damit ein Geradenabschnitt. Die Länge eines Teilabschnitts liefert Aufschluss über b . Für $\tau \in (t_1, t_2]$ betrachte:

$$L(\tau) := |y(\tau) - y(t_1)| = \int_{t_1}^{\tau} \underbrace{|y'(t)|}_{=|D_{x(t)}f \circ x'(t)|} dt \stackrel{\text{Hilfssatz 7}}{=} \int_{t_1}^{\tau} e^{\sigma(x(t))} \underbrace{|x'(t)|}_{=|e|=1} dt = \int_{t_1}^{\tau} \frac{1}{at^2 + b} dt.$$

Wäre neben $a \neq 0$ auch $b \neq 0$, so würde gelten: $|y(\tau) - y(t_1)| = \left[\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \arctan\left(\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}}\right) \right]_{t_1}^{\tau}$.

Die rechte Seite ist eine transzendente Funktion in τ , denn der Arkustangens ist nach *Bemerkung 11* transzendent. Denn gäbe es ein Polynom q mit $q(x, c_2 \arctan(c_1 x) + c_0) \equiv 0$ für Konstanten $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, ließe sich daraus unschwer ein Polynom \tilde{q} konstruieren mit $\tilde{q}(x, \arctan(x)) \equiv 0$, da $x \mapsto c_1 x$ für $x \in \mathbb{R}$ bijektiv wäre. Jedoch gilt auch wegen (**):

$$1 = (a\tau^2 + b)(c|y(\tau) - y^0|^2 + d) \Leftrightarrow |y(\tau) - y^0| = \sqrt{\frac{1}{ac\tau^2 + bc} - \frac{d}{c}},$$

und zusammen mit $|y(\tau) - y(t_1)|^2 = |y(\tau) - y^0|^2 + |y(t_1) - y^0|^2 - 2|y(\tau) - y^0||y(t_1) - y^0|$ wird ersichtlich, dass $L(\tau) = \sqrt{|y(\tau) - y^0|^2 - 2|y(\tau) - y^0|z + z^2}$ mit $z := |y(t_1) - y^0|$ nach *Bemerkung 11* wiederum algebraisch ist. Das ist widersprüchlich, demnach ist $b = 0$.

Andererseits folgt für $a = 0$, dass $b \neq 0$, sonst wäre der erste Faktor in (**) gleich Null. Also ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Falls $a = 0$ folgt, dass $e^\sigma = 1/b$. Also ist σ konstant. Nach dem Zwischenresultat (*) aus dem Beweis von *Hilfssatz 9* ist $(v^i)^T \circ D^2 f \circ v^j \equiv 0_n$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und für jede ONB $\{v^1, \dots, v^n\}$. Insbesondere für die kanonischen Einheitsbasis ergibt sich also, dass $\forall i, j, l = 1, \dots, n : \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = 0$. Deswegen sind alle $S_{li} := \frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ konstant.

Nochmalige Integration führt auf $f_l(x) = \sum_{i=1}^n S_{li} x_i + z_l$ mit einer Konstante z . Bzw. $f(x) = S \circ x + z$, wobei S_{li} der Eintrag in der l -ten Zeile und i -ten Spalte von S ist. Aus $Df \equiv S$ folgt mit Konformität von f , dass $\langle S \circ v, S \circ w \rangle = \frac{1}{b^2} \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Darum ist $|b| S \in O(n)$ und $Df \equiv \frac{1}{|b|} (|b|S)$. Also handelt es sich um eine Ähnlichkeitstransformation.

Falls $b = 0$, betrachte die Inversion an $\mathbb{S}_1^{n-1}(x_0) : g(x) = \frac{x-x^0}{|x-x^0|^2} + x^0$, für $x \in U$. Laut *Hilfssatz 7* ergibt sich die charakteristische Funktion von g mit $v = e_1$ durch:

$$\begin{aligned} e^{\sigma_g(x)} &= \frac{|D_x g \circ e_1|}{|e_1|} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_{1j}}{|x-x^0|^2} - \frac{2(x_1-x_1^0)(x_j-x_j^0)}{|x-x^0|^4} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{|x-x^0|^4} - \frac{4(x_1-x_1^0)^2}{|x-x^0|^6} + \sum_{j=1}^n \frac{4(x_1-x_1^0)^2(x_j-x_j^0)^2}{|x-x^0|^8}} \\ &= \frac{1}{|x-x^0|^2} \sqrt{1 - \frac{4(x_1-x_1^0)^2}{|x-x^0|^2} + \frac{4(x_1-x_1^0)^2}{|x-x^0|^2}} = \frac{1}{|x-x^0|^2} \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion von g^{-1} ist damit $e^{\sigma_{g^{-1}}(y)} = e^{-\sigma_g(g^{-1}(y))} = e^{-\sigma_g(x)} = |x - x^0|^2$ für $y = g(x)$. Zudem ist $h := f \circ g^{-1}$ konform als Verknüpfung konformer Abbildungen mit der charakt. Funktion $e^{\sigma_h(y)} = e^{\sigma_f(g^{-1}(y))} e^{\sigma_{g^{-1}}(y)} = e^{\sigma_f(x)} |x - x^0|^2 \equiv 1/a$, nach *Bemerkung* 8. Somit handelt es sich (analog zum Fall $a = 0$) bei h um eine Ähnlichkeitstransformation und $f = h \circ g$. \square

3 Glattheitsbetrachtungen zur Boggio-Formel

In diesem Abschnitt wird demonstriert, dass die mittels der Boggio-Formel konstruierte Funktion u auf der Einheitskugel \bar{B} glatt ist. Dazu erweist sich folgende Definition nach [GGs, section 2.6] als nützlich.

Definition 13.

$$F_{m,n}(x) := \begin{cases} c_{m,n} |x|^{2m-n} & \text{falls } n > 2m \text{ oder } n \text{ ungerade,} \\ c_{m,n} |x|^{2m-n} (-\log |x|) & \text{falls } n \leq 2m \text{ und } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

wobei:

$$c_{m,n} := \begin{cases} \frac{2\Gamma(n/2-m)}{ne_n 4^m \Gamma(n/2)(m-1)!} & \text{falls } n > 2m \text{ oder } n \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}}{ne_n 4^{m-1} \Gamma(n/2)(m-n/2)!(m-1)!} & \text{falls } n \leq 2m \text{ und } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Im Zuge der Glattheitsbetrachtungen dienen die folgenden Hilfssätze dazu, die Boggio-Formel in einen regulären und singulären Anteil - der sich als $F_{m,n}$ erweist - zu zerlegen.

Hilfssatz 14. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{m!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{(j+1)!(m-1-j)!} .$$

Beweis.

$$0 = (1-1)^m = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{(j+1)!(m-1-j)!} (-1)^j$$

\square

Hilfssatz 15. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit: $n > 2m$ oder n ungerade gilt:

$$\prod_{j=1}^m \frac{1}{\frac{n}{2} - j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} \frac{2}{n-2(m-j)} .$$

Beweis. Das zeigt man mit Hilfe von vollständiger Induktion nach $m \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang ($m = 1$): Sei $n > 2$ oder n ungerade.

$$\prod_{j=1}^1 \frac{1}{\frac{n}{2} - j} = \frac{1}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{2}{n-2} = \sum_{j=0}^0 \frac{(-1)^j}{j!(-j)!} \frac{2}{n-2(1-j)}$$

Induktionsschritt ($m \rightarrow m + 1$): Sei $n > 2(m + 1)$ oder n ungerade.

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\frac{n}{2} - j} &= \frac{1}{\frac{n}{2} - (m + 1)} \prod_{j=1}^m \frac{1}{\frac{n}{2} - j} \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{2}{n - 2(m + 1)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m - 1 - j)!} \frac{2}{n - 2(m - j)} \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m - 1 - j)!} \frac{2}{j + 1} \left(\frac{1}{n - 2(m + 1)} - \frac{1}{n - 2(m - j)} \right) \\
 &= \frac{2}{n - 2(m + 1)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{(j + 1)!(m - 1 - j)!} \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}}{(j + 1)!(m - (j + 1))!} \frac{2}{n - 2(m + 1 - (j + 1))} \\
 &\stackrel{\text{Hilfssatz 14}}{=} \frac{1}{m!} \frac{2}{n - 2(m + 1)} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k!(m - k)!} \frac{2}{n - 2(m + 1 - k)} \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m - k)!} \frac{2}{n - 2(m + 1 - k)}.
 \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 16. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > 2m$ oder n ungerade gilt:

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2} - m)}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m - 1 - j)!} \frac{1}{n - 2(m - j)}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen stellen sicher, dass $\frac{n}{2} - m \notin -\mathbb{N}_0$. Indem man die Funktionalgleichung der Gammafunktion m -mal anwendet erhält man:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \dots = \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{n}{2} - j\right)\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right),$$

und mit *Hilfssatz 15* folgt:
$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\frac{n}{2} - j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m - 1 - j)!} \frac{2}{n - 2(m - j)}.$$

□

Damit kommen wir nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 17. Für gegebenes $f \in C_0^\infty(B)$ gilt $u \in C^\infty(\bar{B})$.

Beweis. Sei $f \in C_0^\infty(B)$ beliebig, aber fest. Wegen des kompakten Trägers existiert ein $\delta \in (0, 1)$, sodass:

$$u(x) = \int_{B_{1-\delta}(0)} G_m(x, y) f(y) dy \quad \text{für } x \in B.$$

u lässt sich mit dieser Formel auf $B_{1+\delta^*}(0)$ fortsetzen, für ein noch zu bestimmendes $\delta^* > 0$.

Die Fortsetzung sei ebenfalls mit u bezeichnet. Der Beweis unterteilt sich dann in zwei Schritte:

Schritt 1: $u \in C^\infty(B_{1+\delta^*}(0) \setminus B_{1-\delta^*}(0))$

Man hat $1 - \delta^* \leq |x| < 1 + \delta^*$ und $|y| < 1 - \delta$. Setze $g(x, y) := \frac{|x|y - \frac{x}{|x|}}{|x-y|}$, dann ist

$$G_m(x, y) = k_{m,n} |x-y|^{2m-n} \int_1^{g(x,y)} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv.$$

Wähle $\delta^* < \delta$. Wegen $y \notin B_{1+\delta^*}(0) \setminus B_{1-\delta^*}(0)$ sind dann alle beteiligten Terme bis auf g offensichtlich glatt. Wir formen die obere Integralgrenze um. Dazu betrachte:

$$\frac{\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 - |x-y|^2}{|x-y|^2} = \frac{(|x|^2|y|^2 - 2xy + 1) - (|x|^2 - 2xy + |y|^2)}{|x-y|^2} = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x-y|^2}.$$

Folglich ergibt sich: $g(x, y) = \sqrt{1 + \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x-y|^2}}$. Dabei muss δ^* weiter so gewählt

werden, dass der Radikand für $|x| > 1$ strikt positiv ist. $x = y$ ist nicht möglich, sofern $\delta^* \leq \frac{\delta}{2}$:

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq (1 - \delta^*) - (1 - \delta) = \delta - \delta^* \geq \frac{\delta}{2}.$$

Wählt man nun $\delta^* \in \left(0, \min\left\{\frac{\delta}{2}, \sqrt{1 + \frac{\delta^2 - \delta^3}{4}} - 1\right\}\right)$, erhält man für $1 < |x| < 1 + \delta^*$:

$$(|x| < 1 + \delta^*) \Rightarrow \left(|x|^2 < 1 + \frac{\delta^2 - \delta^3}{4}\right) \Rightarrow (\delta^3 < \delta^2 + 4(1 - |x|^2)) \Rightarrow \left(\delta < 1 + \frac{4(1 - |x|^2)}{\delta^2}\right).$$

Also folgt: $0 < \delta < 1 + \frac{4(1 - |x|^2)}{\delta^2} \leq 1 + \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^2} \leq 1 + \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x-y|^2}$, da $1 - |x|^2 < 0$.

Dadurch sind jeweils $g, G_m \in C^\infty(B_{1+\delta^*}(0) \setminus B_{1-\delta^*}(0), B_{1-\delta}(0))$.

Die Ableitungen von u bzgl. den x -Koordinaten vertauschen mit dem Integral, da wegen des kompakten Trägers alle Ableitungen beschränkt sind, sodass $u \in C^\infty(B_{1+\delta^*}(0) \setminus B_{1-\delta^*}(0))$.

Schritt 2: $u \in C^\infty(B)$

Mit der Notation $[xy] := \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|$, lässt sich die Boggio-Formel umschreiben zu:

$$\begin{aligned} G_m(x, y) &= k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{\frac{[xy]}{|x-y|}} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv \\ &= k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{\frac{[xy]}{|x-y|}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j (v^2)^{m-1-j} v^{1-n} dv. \end{aligned}$$

Falls $\exists j \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $j = m - n/2 \Leftrightarrow 2(m-j) - n - 1 = -1$, erhält man bei der Integration einen Logarithmus-Term. Deshalb ist Fallunterscheidung nötig.

Für $n > 2m$ oder n ungerade $\nexists j \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $j = m - n/2$. Folglich hat man:

$$\begin{aligned} G_m(x, y) &= k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j \left[\frac{v^{2(m-j)-n}}{2(m-j)-n} \right]_1^{\frac{[xy]}{|x-y|}} \\ &= \frac{|x - y|^{2m-n}}{ne_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} \left(\frac{[xy]}{|x-y|} \right)^{2(m-j)-n} - 1 \\ &\stackrel{\text{Hilfssatz 16}}{=} H(x, y) - F_{m,n}(x - y), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } H(x, y) := \frac{1}{ne_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} [xy]^{2(m-j)-n} |x - y|^{2j}.$$

Somit lässt sich nun die Glattheit von u auf die Betrachtung zweier Terme zurückführen:

$$u(x) = \int_B H(x, y) f(y) dy - \int_B F_{m,n}(x - y) f(y) dy.$$

Das erste Integral ist offensichtlich glatt, da sich $[xy] = \sqrt{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2) + |x - y|^2}$, analog zu g , glatt fortsetzen lässt (insbes. für $x = 0$). Für das zweite Integral ergibt sich:

$$\int_B F_{m,n}(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_{m,n}(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_{m,n}(y) f(x - y) dy,$$

wobei f auch die triviale Fortsetzung von $f \in C_0^\infty(B)$ nach \mathbb{R}^n bezeichnet. Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_B F_{m,n}(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_{m,n}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x - y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} F_{m,n}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} f(x - y) dy$$

$$\text{bzw. } D_x^\alpha \int_B F_{m,n}(x - y) f(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} F_{m,n}(y) D_y^\alpha f(x - y) dy \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Das Vertauschen von Integration und Differentiation ist gerechtfertigt, weil alle Ableitungen beschränkt sind - wegen des kompakten Trägers und Stetigkeit der Ableitungen. Also ist auch dieses Integral glatt.

Für $n \leq 2m$ und n gerade existiert ein $j \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $j = m - n/2$, sodass:

$$\begin{aligned} G_m(x, y) &= k_{m,n} \frac{(m-1)!(-1)^{m-n/2}}{(m-n/2)!(n/2-1)!} |x-y|^{2m-n} \log \frac{[xy]}{|x-y|} \\ &\quad + k_{m,n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m-n/2}}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} ([xy]^{2(m-j)-n} |x-y|^{2j} - |x-y|^{2m-n}) \\ &= F_{m,n}(x-y) + H(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } H(x, y) &:= k_{m,n} \frac{(m-1)!(-1)^{m-n/2}}{(m-n/2)!(n/2-1)!} |x-y|^{2m-n} \log[xy] \\ &\quad + k_{m,n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m-n/2}}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} ([xy]^{2(m-j)-n} |x-y|^{2j} - |x-y|^{2m-n}). \end{aligned}$$

Wegen $2m - n \geq 0$ und $[xy] > 0$ für $(x, y) \in B \times B$, ist $H(x, y)$ regulär und das erste Integral lässt sich beliebig oft ableiten. Beim zweiten Integral verfähre wie oben.

□

4 Greensche Funktion mit Pol im Ursprung

Ergänzend zu diesen Abschnitt bietet §8 eine elegante Beweis-Alternative für Satz 22.

Definition 18. Eine Funktion $f \in C^{2m}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ heißt Fundamentallösung zu $(-\Delta)^m$ in \mathbb{R}^n , falls: $(-\Delta)^m f = \delta_0$ im distributionellem Sinne gilt, d.h. $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\psi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (-\Delta)^m \psi(y) dy.$$

Es geht zunächst darum zu zeigen, dass $F_{m,n}$, eine Fundamentallösung zu $(-\Delta)^m$ ist. Vorbereitend benötigen wir dafür zwei Hilfssätze, die $(-\Delta)^m F_{m,n}(x) = 0$ für $x \neq 0$ ergeben.

Hilfssatz 19. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > 2m$ oder n ungerade sowie $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $k = 1, \dots, m$ gilt:

$$\Delta^k |x|^{2m-n} = 2^k \prod_{l=1}^k \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n}.$$

Beweis. Das zeigt man mit Hilfe von vollständiger Induktion für $k = 1, \dots, m$:

Induktionsanfang ($k = 1$):

$$\begin{aligned} \partial_i |x|^{2m-n} &= (2m-n)x_i |x|^{2(m-1)-n} \\ \partial_i^2 |x|^{2m-n} &= (2m-n)|x|^{2(m-1)-n} + (2(m-1)-n)(2m-n)x_i^2 |x|^{2(m-2)-n} \\ \Delta |x|^{2m-n} &= 2(m-1)(2m-n)|x|^{2(m-1)-n} \end{aligned} \quad (***)$$

Induktionsschritt $((k-1) \rightarrow k)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta^k |x|^{2m-n} &= \Delta \left(\Delta^{k-1} |x|^{2m-n} \right) \stackrel{\text{IV}}{=} 2^{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) \Delta |x|^{2(m-k+1)-n} \\
 &\stackrel{\text{IA}}{=} 2^{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) 2(m-k)(2(m-k+1)-n) |x|^{2(m-k)-n} \\
 &= 2^k \prod_{l=1}^k \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n}.
 \end{aligned}$$

□

Indem man ausnutzt, dass die Terme nur betragsmäßig von x abhängen, lassen sich die beiden Hilfssätze alternativ und eleganter radialsymmetrisch, d.h. mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, rechnend beweisen .

Hilfssatz 20. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2m$ und n gerade sowie $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $k = 1, \dots, m$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \Delta^k \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) &= 2^k \prod_{l=1}^k \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n} \log |x| \\
 &+ 2^{k-1} \sum_{l=1}^k \left(\left(4(m-l+1) - n - 2 \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k \left((m-j)(2(m-j+1)-n) \right) \right) |x|^{2(m-k)-n}.
 \end{aligned}$$

Beweis. Das zeigt man analog mithilfe von vollständiger Induktion für $k = 1, \dots, m$:

Induktionsanfang $(k = 1)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) &= \left(\Delta |x|^{2m-n} \right) \log |x| + 2 \left(\nabla |x|^{2m-n} \right) \left(\nabla \log |x| \right) + |x|^{2m-n} \Delta \log |x| \\
 &= \left(\Delta |x|^{2m-n} \right) \log |x| + 2 \sum_{i=1}^n \left(\partial_i |x|^{2m-n} \partial_i \log |x| \right) + |x|^{2m-n} \Delta \log |x| \\
 &= 2(m-1)(2m-n) |x|^{2(m-1)-n} \log |x| + 2 \sum_{i=1}^n \left((2m-n) x_i |x|^{2(m-1)-n} \frac{x_i}{|x|^2} \right) + |x|^{2m-n} \frac{n-2}{|x|^2} \\
 &= 2(m-1)(2m-n) |x|^{2(m-1)-n} \log |x| + 2(2m-n) |x|^{2(m-1)-n} + (n-2) |x|^{2(m-1)-n} \\
 &= \left(2(m-1)(2m-n) \log |x| + 4m - n - 2 \right) |x|^{2(m-1)-n}
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt $((k-1) \rightarrow k)$:

$$\begin{aligned}
\Delta^k \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) &= \Delta \left(\Delta^{k-1} (|x|^{2m-n} \log |x|) \right) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} 2^{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) \Delta \left(|x|^{2(m-k+1)-n} \log |x| \right) \\
&\quad + 2^{k-2} \sum_{l=1}^{k-1} \left((4(m-l+1)-n-2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k-1} \left((m-j)(2(m-j+1)-n) \right) \right) \Delta |x|^{2(m-k+1)-n} \\
&\stackrel{\text{IA}}{=} \dots \left(2(m-k)(2(m-k+1)-n) \log |x| + 4(m-k+1)-n-2 \right) |x|^{2(m-k)-n} \\
&\stackrel{(\text{***})}{=} \dots \left(2(m-k)(2(m-k+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n} \\
&= 2^k \prod_{l=1}^k \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n} \log |x| \\
&\quad + \left(4(m-k+1)-n-2 \right) 2^{k-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^k \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{2(m-k)-n} \\
&\quad + 2^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \left((4(m-l+1)-n-2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k \left((m-j)(2(m-j+1)-n) \right) \right) |x|^{2(m-k)-n}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 21. Es gilt: $(-\Delta)^m F_{m,n} = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beweis. Das folgt aus den *Hilfssätzen* 19 und 20. Mit Fallunterscheidung ergibt sich:

Falls $n > 2m$ oder n ungerade:

$$\Delta^m |x|^{2m-n} = 2^m \prod_{l=1}^m \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{-n} = 0 \quad \text{und somit} \quad (-\Delta)^m F_{m,n} = 0.$$

Falls $n \leq 2m$ und n gerade:

$$\begin{aligned}
\Delta^m \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) &= 2^m \prod_{l=1}^m \left((m-l)(2(m-l+1)-n) \right) |x|^{-n} \log |x| \\
&\quad + 2^{m-1} \sum_{l=1}^m \left((4(m-l+1)-n-2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \left((m-j)(2(m-j+1)-n) \right) \right) |x|^{-n}
\end{aligned}$$

Das Produkt im ersten Term ist offensichtlich gleich Null. Im zweiten Term ist ebenso offenbar jeder Summand für $l \neq m$ gleich Null. Also bleibt nur der Summand mit $l = m$:

$$\Delta^m \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) = 2^{m-1} (4-n-2) \prod_{j=1}^{m-1} \left((m-j)(2(m-j+1)-n) \right) |x|^{-n}.$$

Für $n = 2$ ist dieser Term offenbar Null. Für $n \neq 2$, d.h. $n \geq 4$ und n gerade, betrachte:

$$\prod_{j=1}^{m-1} (2m - 2j + 2 - n) = (2m - n) \cdot \dots \cdot (4 - n).$$

Es handelt sich um das Produkt der Differenzen aller geraden Zahlen von $4 - n \leq 0$ zu $2m - n \geq 0$. Es existiert ein $j \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $2(m-j+1) - n = 0$, da $n \leq 2m$ und gerade ist. Folglich hat man:

$$\Delta^m \left(|x|^{2m-n} \log |x| \right) = 0 \quad \text{und somit} \quad (-\Delta)^m F_{m,n} = 0.$$

□

Satz 22. $F_{m,n}$ ist eine Fundamentallösung des polyharmonischen Operators $(-\Delta)^m$ in \mathbb{R}^n .

Beweis. Zu zeigen ist $(-\Delta)^m F_{m,n} = \delta_0$ im distributionellem Sinne, d.h. $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\psi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta_y)^m \psi(y) F_{m,n}(y) dy.$$

Sei dafür $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig, aber fest. Auf dem Integrationsbereich $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$, für ein $\varepsilon > 0$, genügt der Integrand den Anforderungen vom Satz von Gauß. Wir formen damit um:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^m \psi(y) F_{m,n}(y) dy &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} (-\Delta)^m \psi(y) F_{m,n}(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} (-\Delta)^m \psi(y) F_{m,n}(y) dy = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y| \geq \varepsilon} -\partial_i^2 (-\Delta)^{m-1} \psi(y) F_{m,n}(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \int_{|y| \geq \varepsilon} \partial_i (-\Delta)^{m-1} \psi(y) \partial_i F_{m,n}(y) dy - \int_{|y|=\varepsilon} \partial_i (-\Delta)^{m-1} \psi(y) F_{m,n}(y) \underbrace{\frac{-y_i}{|y|}}_{=\nu_i} dS(y) \right). \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral ist von der Ordnung ε^{2m-1} bzw. $\varepsilon^{2m-1} \log(\varepsilon)$ und verschwindet somit für $\varepsilon \searrow 0$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y| \geq \varepsilon} \partial_i (-\Delta)^{m-1} \psi(y) \partial_i F_{m,n}(y) dy \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(- \sum_{i=1}^n \int_{|y| \geq \varepsilon} (-\Delta)^{m-1} \psi(y) \partial_i^2 F_{m,n}(y) dy + \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} (-\Delta)^{m-1} \psi(y) \partial_i F_{m,n}(y) \nu_i dS(y) \right)
\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral ist von der Ordnung ε^{2m-2} bzw. $\varepsilon^{2m-2}(\log(\varepsilon) + 1)$ und verschwindet somit für $\varepsilon \searrow 0$, falls $m \neq 1$. Weitere $(k-1)$ -malige analoge Anwendung vom Satz von Gauß liefert:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} (-\Delta)^{m-1} \psi(y) (-\Delta) F_{m,n}(y) dy = \dots \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{|y| \geq \varepsilon} (-\Delta)^{m-k} \psi(y) (-\Delta^k) F_{m,n}(y) dy + \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} (-\Delta)^{m-k} \psi(y) \partial_i (-\Delta)^{k-1} F_{m,n}(y) \nu_i dS(y) \right)
\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral ist von der Ordnung ε^{2m-2k} bzw. $\varepsilon^{2m-2k}(\log(\varepsilon) + 2k - 1)$ und verschwindet somit für $\varepsilon \searrow 0$ sofern $k = 1, \dots, m-1$. Schließlich führt das auf:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} (-\Delta) \psi(y) (-\Delta)^{m-1} F_{m,n}(y) dy \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{|y| \geq \varepsilon} \psi(y) \underbrace{(-\Delta)^m F_{m,n}(y)}_{=0 \text{ nach Korollar 21}} dy + \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) \partial_i (-\Delta)^{m-1} F_{m,n}(y) \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \right).
\end{aligned}$$

Fall 1 ($n > 2m$ oder n ungerade):

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) c_{m,n} (-2)^{m-1} \left(\prod_{l=1}^{m-1} (m-l)(2(m-l+1)-n) \right) \underbrace{\partial_i |y|^{2-n}}_{=(2-n)y_i |y|^{-n}} \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \\
&= - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) c_{m,n} (-2)^{m-1} (m-1)! \left(\prod_{l=1}^m (-2) \left(\frac{n}{2} - (m-l+1) \right) \right) |y|^{1-n} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) c_{m,n} 4^{m-1} 2(m-1)! \left(\prod_{l=1}^m \left(\frac{n}{2} - (m+1-l) \right) \right) |y|^{1-n} dS(y) \\
&\stackrel{(j=m+1-l)}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{2\Gamma(n/2 - m)}{ne_n 4^m \Gamma(n/2)(m-1)!} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) 4^{m-1} 2(m-1)! \underbrace{\left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{n}{2} - j \right) \right)}_{\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2-m)}} \varepsilon^{1-n} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{ne_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) dS(y) = \psi(0).
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil ψ stetig ist.

Fall 2 ($n \leq 2m$ und n gerade):

Nach *Hilfsatz 20* gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^{m-1} (|x|^{2m-n} \log |x|) &= 2^{m-1} \prod_{l=1}^{m-1} \left((m-l)(2(m-l) + 2 - n) \right) |x|^{2-n} \log |x| \\ &+ 2^{m-2} \sum_{l=1}^{m-1} \left((4(m-l+1) - n - 2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m-1} \left((m-j)(2(m-j) + 2 - n) \right) \right) |x|^{2-n}. \end{aligned}$$

Falls $n \neq 2$, gilt für $l_0 := m + 1 - n/2$, dass: $1 \leq l_0 \leq m - 1$. Das Produkt im ersten Summanden wird somit zu Null. Ebenso verschwinden alle Summanden mit $l \neq l_0$ im zweiten Term. Es verbleibt:

$$\begin{aligned} \Delta^{m-1} (|x|^{2m-n} \log |x|) &= 2^{m-2} \left(4 \frac{n}{2} - n - 2 \right) \frac{(m-1)!}{m-l_0} 2^{m-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m+1-\frac{n}{2}}}^{m-1} \left(m - j + 1 - \frac{n}{2} \right) |x|^{2-n} \\ &\stackrel{(l=m-j)}{=} 4^{m-2} \frac{n-2}{n/2-1} (m-1)! \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \frac{n}{2}-1}}^{m-1} \left(l + 1 - \frac{n}{2} \right) \right) |x|^{2-n} \\ &= 2 \cdot 4^{m-2} (m-1)! \left(\underbrace{\prod_{l=\frac{n}{2}}^{m-1} \left(l + 1 - \frac{n}{2} \right)}_{=(m-\frac{n}{2})!} \underbrace{\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}-2} \left(l + 1 - \frac{n}{2} \right)}_{=(-1)^{\frac{n}{2}-2} (\frac{n}{2}-2)!} \right) |x|^{2-n} \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} 4^{m-2} 2(m-1)! \left(m - \frac{n}{2} \right)! \left(\frac{n}{2} - 2 \right)! \frac{n-2}{n-2} |x|^{2-n} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} 4^{m-1} \Gamma(\frac{n}{2}) \left(m - \frac{n}{2} \right)! (m-1)!}{n-2} |x|^{2-n}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich der übrig gebliebene Oberflächenterm nun auswerten zu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) \partial_i (-\Delta)^{m-1} F_{m,n}(y) \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n c_{m,n} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) (-1)^{m-1} (-1) \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} 4^{m-1} \Gamma(\frac{n}{2}) (m - \frac{n}{2})! (m-1)!}{n-2} \underbrace{\partial_i |y|^{2-n}}_{=(2-n)y_i |y|^{-n}} \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{n e_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) dS(y) = \psi(0).
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\Delta^{m-1} \left(|x|^{2m-2} \log |x| \right) &= 2^{m-1} \prod_{l=1}^{m-1} \left((m-l) 2(m-l) \right) \log |x| \\
&+ 2^{m-2} \sum_{l=1}^{m-1} \left(4(m-l) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m-1} \left((m-j) 2(m-j) \right) \right) = 4^{m-1} (m-1)! (m-1)! \left(\log |x| + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{m-l} \right).
\end{aligned}$$

Damit folgt für den übrig gebliebenen Oberflächenterm:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) \partial_i (-\Delta)^{m-1} F_{m,n}(y) \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n c_{m,2} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) (-1)^m 4^{m-1} (m-1)! (m-1)! \underbrace{\partial_i \left(\log |y| + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{m-l} \right)}_{=y_i |y|^{-2}} \frac{-y_i}{|y|} dS(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi \varepsilon} \int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) dS(y) = \psi(0).
\end{aligned}$$

□

Satz 23. Es gilt: $(-\Delta_y)^m G_m(0, y) = \delta_0$ im distributionellem Sinne, bezüglich B .

Beweis. Das Theorem wird mithilfe der Fundamentallösung $F_{m,n}$ bewiesen. Die obere Integralgrenze lässt sich umgeformt für $x = 0$ und $y \neq 0$ stetig fortsetzen:

$$\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 = |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1, \quad \text{also: } \frac{[xy]}{|x-y|} = \frac{\sqrt{|x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1}}{|x-y|}.$$

Damit lässt sich G_m für $x = 0, y \in B$ auswerten:

$$\begin{aligned}
G_m(0, y) &= k_{m,n} |y|^{2m-n} \int_1^{1/|y|} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv \\
&= k_{m,n} |y|^{2m-n} \int_1^{1/|y|} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j (v^2)^{m-1-j} v^{1-n} dv.
\end{aligned}$$

Fall 1 ($n > 2m$ oder n ungerade): Für $j \in \{0, m-1\}$ ist $(-\Delta_y)^m |y|^{2j} = 0$.

$$\begin{aligned} G_m(0, y) &= k_{m,n} |y|^{2m-n} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j \left[\frac{v^{2(m-j)-n}}{2(m-j)-n} \right]_1^{1/|y|} \\ &= \frac{|y|^{2m-n}}{n e_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} (|y|^{n-2(m-j)} - 1) \\ &= \frac{1}{n e_n 4^{m-1} (m-1)!} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} \frac{1}{2(m-j)-n} (|y|^{2j} - |y|^{2m-n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\Delta_y)^m G_m(0, y) &= \frac{1}{n e_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} \frac{1}{2(m-j)-n} \left(\underbrace{(-\Delta_y)^m |y|^{2j}}_{=0} - (-\Delta_y)^m |y|^{2m-n} \right) \\ &= (-\Delta_y)^m \frac{1}{n e_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \frac{\Gamma(n/2 - m)}{2 \Gamma(n/2)} |y|^{2m-n} \stackrel{\text{Satz 22}}{=} (-\Delta_y)^m F_{m,n}(y) = \delta_0. \end{aligned}$$

Fall 2 ($n \leq 2m$ und n gerade): $\exists j \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $j = m - n/2$, sodass $G_m(0, y) =$

$$k_{m,n} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m-n/2}}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{(-1)^j}{2(m-j)-n} (|y|^{2j} - |y|^{2m-n}) + |y|^{2m-n} \frac{(m-1)!(-1)^{m-n/2}}{(m-n/2)!(n/2-1)!} [\log(v)]_1^{1/|y|} \right)$$

Aufgrund von $0 \leq 2m - n \leq 2m$, ist $(-\Delta_y)^m |y|^{2m-n} = 0$. Dadurch hat man:

$$(-\Delta_y)^m G_m(0, y) = (-\Delta_y)^m \frac{1}{n e_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \frac{(m-1)!(-1)^{m-n/2}}{(m-n/2)!(n/2-1)!} |y|^{2m-n} (-\log |y|) \stackrel{\text{Satz 22}}{=} \delta_0.$$

□

5 Kovarianz unter Möbiustransformationen

Satz 24. Seien ϕ eine Möbiustransformation (mit möglicher Polstelle x_0) und bezeichne J_ϕ den Betrag der Jacobi-Determinante. Dann gilt $\forall m \in \mathbb{N}$ und jedes $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$:

$$(-\Delta)^m \left(J_\phi^{\frac{n-2m}{2n}} u \circ \phi \right) = J_\phi^{\frac{n+2m}{2n}} \left((-\Delta)^m u \right) \circ \phi \quad .$$

Ein raffinierter Induktionsbeweis zu diesem Satz findet man in [ADFJS] unter Benutzung des Konzeptes der Kelvin-Transformierten.

Definition 25. Für $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^{2m}(U, \mathbb{R})$ heißt $K_m[u] : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$K_m[u](x) := |x|^{2m-n} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) ,$$

die *Kelvin-Transformierte* von u . Hier und im Folgenden sei stets $x \neq 0$.

Hilfssatz 26. Seien n, m und u wie in *Definition 25*. Dann gilt für die Kelvin-Transformierte von u :

$$x \nabla K_m[u] = (2m - n)K_m[u] - K_m[x \nabla u].$$

Beweis. Der Hilfssatz ist entnommen aus [ADFJS, lemma 3.1,(3.1), p.7]. Der Beweis dort ist elegant. Dagegen habe ich den Ausdruck einfach berechnet:

$$\begin{aligned} x \nabla K_m[u](x) &= \sum_{i=1}^n x_i \partial_i \left(|x|^{2m-n} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left((2m - n)x_i |x|^{2m-n-2} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) + |x|^{2m-n} \nabla u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \cdot \left(\frac{e_i}{|x|^2} - \frac{2x_i}{|x|^4} x \right) \right) \\ &= (2m - n) |x|^{2m-n} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) + |x|^{2m-n-2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\partial_i u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) - 2 \frac{x_i}{|x|^2} \nabla u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \cdot x \right) \\ &= (2m - n) K_m[u](x) - \underbrace{|x|^{2m-n} \left(\frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \right)}_{=K_m[x \nabla u](x)}. \end{aligned}$$

□

Der Artikel von [ADFJS] betrachtet weitergehend reelle $m > 0$ und benutzt Fouriertransformationen um weitere Zwischenresultate zu beweisen. Abweichend davon habe ich gefunden, dass ich folgenden Hilfssatz benötige um *Hilfssatz 28* - welcher seine Entsprechung in [ADFJS, lemma 3.1,(3.2), p.7] findet - zu beweisen.

Hilfssatz 27. Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(-\Delta)^m (x \cdot \nabla u) = 2m(-\Delta)^m u + x \cdot (\nabla (-\Delta)^m u).$$

Insbesondere folgt daraus:

$$4x \cdot (\nabla (-\Delta)^{m+1} u) = 4(-\Delta)^{m+1} (x \cdot \nabla u) - 8(m+1)(-\Delta)^{m+1} u.$$

Beweis. Induktionsanfang ($m = 0$): ist trivial erfüllt.

Induktionsschritt ($m \rightarrow m + 1$):

$$\begin{aligned}
 (-\Delta)^{m+1}(x \cdot \nabla u) &\stackrel{\text{IV}}{=} -\Delta \left(2m(-\Delta)^m u + x \cdot (\nabla(-\Delta)^m u) \right) \\
 &= 2m(-\Delta)^{m+1} u - \sum_{i,j=1}^n \partial_j^2 \left(x_i \partial_i (-\Delta)^m u \right) \\
 &= 2m(-\Delta)^{m+1} u - \sum_{i,j=1}^n \left(2\delta_{ij} \partial_i \partial_j (-\Delta)^m u + x_i \partial_i (-\Delta)^m \partial_j^2 u \right) \\
 &= (2m+2)(-\Delta)^{m+1} u + x \cdot (\nabla(-\Delta)^{m+1} u)
 \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 28. Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(-\Delta)^m \left(|x|^2 \Delta u \right) = -|x|^2 (-\Delta)^{m+1} u + 4m(-\Delta)^m (x \cdot \nabla u) + 2m(n-2m-2)(-\Delta)^m u$$

Beweis. Induktionsanfang ($m=0$): ist trivial erfüllt.

Induktionsschritt ($m \rightarrow m+1$):

$$\begin{aligned}
 (-\Delta)^{m+1} \left(|x|^2 \Delta u \right) &\stackrel{\text{IV}}{=} -\Delta \left(-|x|^2 (-\Delta)^{m+1} u + 4m(-\Delta)^m (x \cdot \nabla u) + 2m(n-2m-2)(-\Delta)^m u \right) \\
 &= (\Delta |x|^2)(-\Delta)^{m+1} u - |x|^2 (-\Delta)^{m+2} u + 2(\nabla |x|^2) \cdot (\nabla(-\Delta)^{m+1} u) \\
 &\quad + 4m(-\Delta)^{m+1} (x \cdot \nabla u) + (2mn - 4m^2 - 4m)(-\Delta)^{m+1} u \\
 &= -|x|^2 (-\Delta)^{m+2} u + 4m(-\Delta)^{m+1} (x \cdot \nabla u) \\
 &\quad + (2mn - 4m^2 - 4m + 2n)(-\Delta)^{m+1} u + 4x \cdot \nabla(-\Delta)^{m+1} u \\
 &\stackrel{\text{HS 27}}{=} -|x|^2 (-\Delta)^{m+2} u + (4m+4)(-\Delta)^{m+1} (x \cdot \nabla u) \\
 &\quad + (2mn - 4m^2 - 4m + 2n - 8(m+1))(-\Delta)^{m+1} u \\
 &= -|x|^2 (-\Delta)^{m+2} u + 4(m+1)(-\Delta)^{m+1} (x \cdot \nabla u) \\
 &\quad + \underbrace{(2mn - 4m^2 - 12m + 2n - 8)}_{=2(m+1)(n-2(m+1)-2)} (-\Delta)^{m+1} u.
 \end{aligned}$$

□

Auf den algebraischen Beweis von folgenden nützlichen Hilfssatz bin ich selbst gestoßen.

Hilfssatz 29. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ dann gilt:

$$\left| \det \underbrace{\left(\frac{2a_i a_j}{|a|^2} - \delta_{ij} \right)_{i,j=1,\dots,n}}_{=:T} \right| = 1 \quad .$$

Beweis. Es wird gezeigt, dass $-1, 1$ die einzigen Eigenwerte sind. Für die Determinante als Produkt der Eigenwerte folgt dann: $\det(T) \in \{-1, 1\}$ und damit die Behauptung. Dazu wird das Minimalpolynom m_T bestimmt:

$$\begin{aligned} [T^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2a_i a_k}{|a|^2} - \delta_{ik} \right) \left(\frac{2a_k a_j}{|a|^2} - \delta_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4a_i a_j a_k^2}{|a|^4} - \frac{2a_i a_k}{|a|^2} \delta_{kj} - \frac{2a_k a_j}{|a|^2} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{kj} \right) \\ &= \frac{4a_i a_j}{|a|^2} - \frac{2a_i a_j}{|a|^2} - \frac{2a_i a_j}{|a|^2} + \delta_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow T^2 - I = 0 \quad , \text{ also } m_T = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Weil das charakteristische Polynom χ_T dieselben Nullstellen besitzt wie das Minimalpolynom m_T , sind die Eigenwerte somit -1 und 1 . □

Beweis zu Satz 24:

Beweis. Satz und Beweis sind im Wesentlichen aus [ADFJS, proposition 3.2, p.8] übernommen.

Abweichend ist hier aber der Induktionsanfang durch direkte Berechnung nachgewiesen. Laut *Bemerkung 6* ist eine Möbiustransformation ϕ entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder lässt sich mittels $\phi = \phi_1 \circ j \circ \phi_2$ darstellen, wobei es sich bei j um die Inversion bezüglich \mathbb{S}_1^{n-1} und bei ϕ_1, ϕ_2 um Ähnlichkeitstransformationen handelt. Falls gilt $\phi(x) = \lambda A \circ x + \beta$ mit $\lambda > 0$, $A \in O(n)$, so ist die Aussage trivial, wegen $J_\phi \equiv \lambda^n$ und $\Delta(u \circ \phi) = \lambda^2 (\Delta u) \circ \phi$. Darum betrachte den anderen Fall.

Seien $\phi_i = \lambda_i A_i \circ x + \beta_i$ mit $\lambda_i > 0$ und $A_i \in O(n)$, für $i = 1, 2$. Mit *Hilfssatz 29* folgt:

$$(Dj)_{lk} = \partial_k \frac{x_l}{|x|^2} = \frac{\delta_{lk}}{|x|^2} - \frac{2x_l x_k}{|x|^4} \Rightarrow |\det(Dj)| = \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Wegen $|\det(D\phi_i)|(x) = \lambda_i^n$ und Determinanten-Multiplikationssatz genügt es zu zeigen:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^m \left(|x|^{2m-n} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \right) &= |x|^{-n-2m} \left((-\Delta)^m u \right) \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \\ \Leftrightarrow (-\Delta)^m K_m[u] &= |x|^{-4m} K_m[(-\Delta)^m u]. \end{aligned}$$

Induktionsanfang ($m = 1$) :

$$\begin{aligned}
 \Delta K_1[u](x) &= \Delta \left(|x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \left(|x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_i \left((2-n)x_i |x|^{-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) + |x|^{2-n} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot \left(\frac{e_i}{|x|^2} - \frac{2x_i}{|x|^4} x \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_i \left((2-n)x_i |x|^{-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) + |x|^{-n} \partial_i u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 2x_i |x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n (2-n) |x|^{-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n (2-n)(-n)x_i^2 |x|^{-n-2} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &\quad + \left(\sum_{i=1}^n (2-n)x_i |x|^{-n} \left(\frac{\partial_i u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{|x|^2} - \frac{2x_i}{|x|^4} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \right) \right) \\
 &\quad + \left(\sum_{i=1}^n (-n)x_i |x|^{-n-2} \partial_i u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n |x|^{-n} \nabla(\partial_i u)\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot \left(\frac{e_i}{|x|^2} - \frac{2x_i}{|x|^4} x \right) \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{i=1}^n 2|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \right) + \left(\sum_{i=1}^n 2(n+2)x_i^2 |x|^{-n-4} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{i=1}^n 2x_i |x|^{-n-2} \partial_i u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{i=1}^n 2x_i |x|^{-n-2} \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{\partial_i \partial_j u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{|x|^2} - \frac{2x_i}{|x|^4} \nabla(\partial_j u)\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \right) \right) \\
 &= (2-n)|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x + (2n-4)|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \\
 &\quad - n|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x + |x|^{-n-2} \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 2|x|^{-n-4} \left(\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \partial_j \partial_i u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &\quad - 2n|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x + (2n+4)|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x \\
 &\quad - 2|x|^{-n-2} \nabla u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \cdot x - 2|x|^{-n-4} \left(\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \partial_i \partial_j u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &\quad + 4|x|^{-n-4} \left(\sum_{j,l=1}^n x_j x_l \partial_l \partial_j u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right) \\
 &= |x|^{-n-2} \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = |x|^{-4} K_1[\Delta u](x) = |x|^{-2} K_1[|x|^2 \Delta u](x)
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt ($m \rightarrow m + 1$):

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{m+1} K_{m+1}[u] &= -(-\Delta)^m \Delta \left(|x|^{2m} K_1[u] \right) \\
&= -(-\Delta)^m \left(2m(n + 2m - 2) |x|^{2m-2} K_1[u] + |x|^{2m} \Delta K_1[u] + 4m |x|^{2m-2} (x \cdot \nabla K_1[u]) \right) \\
&\stackrel{\text{HS 26}}{=} -(-\Delta)^m \left(2m(-n + 2m + 2) |x|^{2m-2} K_1[u] + |x|^{2m} \Delta K_1[u] - 4m |x|^{2m-2} K_1[x \cdot \nabla u] \right) \\
&= -(-\Delta)^m \left(2m(-n + 2m + 2) K_m[u] + |x|^{2m} \Delta K_1[u] - 4m K_m[x \cdot \nabla u] \right) \\
&\stackrel{\text{IA}}{=} -(-\Delta)^m \left(2m(-n + 2m + 2) K_m[u] + K_m[|x|^2 \Delta u] - 4m K_m[x \cdot \nabla u] \right) \\
&\stackrel{\text{IS}}{=} 2m(n - 2m - 2) |x|^{-4m} K_m[(-\Delta)^m u] - |x|^{-4m} K_m[(-\Delta)^m (|x|^2 \Delta u)] \\
&\quad + 4m |x|^{-4m} K_m[(-\Delta)^m (x \cdot \nabla u)] \\
&= |x|^{-4m} K_m \left[-(-\Delta)^m (|x|^2 \Delta u) + 4m (-\Delta)^m (x \cdot \nabla u) + 2m(n - 2m - 2) (-\Delta)^m u \right] \\
&\stackrel{\text{HS 28}}{=} |x|^{-4m} K_m[|x|^2 (-\Delta)^{m+1} u] = |x|^{-4(m+1)} K_{m+1}[(-\Delta)^{m+1} u].
\end{aligned}$$

□

6 Beweis von Hauptsatz 1

Hier laufen alle bisherigen Hauptresultate zusammen. Um die Kovarianz bezüglich Möbiustransformationen auszunutzen zu können, betrachte folgende Inversion.

Hilfssatz 30. Für $x \in B \setminus \{0\}$ beliebig, aber fest, gilt für die Inversion ϕ_x bezüglich der Sphäre $\mathbb{S}_r^{n-1}(\frac{x}{|x|^2})$, wobei $r = \sqrt{\frac{1-|x|^2}{|x|^2}}$, d.h. mit $\phi_x(y) := \frac{1}{|x|^2} \left(x + (1 - |x|^2) \frac{y - \frac{x}{|x|^2}}{|y - \frac{x}{|x|^2}|^2} \right)$:

- (a) $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\frac{x}{|x|^2}\} : \phi_x(\phi_x(y)) = y$
- (b) $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\frac{x}{|x|^2}\} : |\phi_x(y)| = \frac{|x-y|}{|x|y - \frac{x}{|x|}}$
- (c) ϕ_x eingeschränkt auf \bar{B} ist ein Automorphismus mit: $\phi_x(0) = x, \phi_x(x) = 0$
- (d) $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\frac{x}{|x|^2}\} : J_{\phi_x}(y) := |\det(D\phi_x)(y)| = (1 - |x|^2)^n \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{-2n}$
- (e) $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\frac{x}{|x|^2}\} : J_{\phi_x}(\phi_x(y)) = \frac{1}{J_{\phi_x}(y)}$.

Beweis. zu(a): Eine Inversion j bzgl. $\mathbb{S}_r^{n-1}(y_0)$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$ ist selbstinvers:

$$j(j(y)) = y_0 + r^2 \frac{j(y) - y_0}{|j(y) - y_0|^2} = y_0 + r^2 \frac{r^2 \frac{y-y_0}{|y-y_0|^2}}{\left| r^2 \frac{y-y_0}{|y-y_0|^2} \right|^2} = y, \text{ insb. für } j = \phi_x, y_0 = \frac{x}{|x|^2}, r^2 = \frac{1 - |x|^2}{|x|^2}.$$

zu(b):

$$\begin{aligned}
 |\phi_x(y)|^2 &= \frac{1}{|x|^4} \left(|x|^2 + 2(1 - |x|^2) \frac{x \cdot y - 1}{\left|y - \frac{x}{|x|^2}\right|^2} + (1 - |x|^2)^2 \frac{1}{\left|y - \frac{x}{|x|^2}\right|^2} \right) \\
 &= \frac{1}{|x|^4 \left|y - \frac{x}{|x|^2}\right|^2} \left(|x|^2 \left(|y|^2 - 2 \frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) + 2(x \cdot y - 1) - 2|x|^2(x \cdot y - 1) + (1 - |x|^2)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{|x|^2 \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2} \left(|x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1 + 2x \cdot y - 2 - 2|x|^2 x \cdot y + 2|x|^2 + 1 - 2|x|^2 + |x|^4 \right) \\
 &= \frac{1}{|x|^2 \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2} \left(|x|^2 |y|^2 - 2|x|^2 x \cdot y + |x|^4 \right) = \frac{|x - y|^2}{\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2}
 \end{aligned}$$

zu(c): Zeige zuerst, dass $\phi_x(\bar{B}) \subseteq \bar{B}$ gilt. Für x mit $0 < |x| < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - |x|^2 < 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
 |y| \leq 1 &\Rightarrow |y|^2 \leq 1 \Rightarrow |y|^2(1 - |x|^2) \leq 1 - |x|^2 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 |y|^2 + 1 \\
 \Rightarrow |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2 &\leq |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1 \Rightarrow |x - y|^2 \leq \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 \Rightarrow |\phi_x(y)| \leq 1.
 \end{aligned}$$

Somit gilt auch $\bar{B} \stackrel{(a)}{=} \phi_x(\phi_x(\bar{B})) \subseteq \phi_x(\bar{B})$, also $\phi_x(\bar{B}) = \bar{B}$.

$$\begin{aligned}
 \phi_x(0) &= \frac{1}{|x|^2} \left(x + (1 - |x|^2) \frac{-\frac{x}{|x|^2}}{\left| -\frac{x}{|x|^2} \right|^2} \right) = \frac{1}{|x|^2} \left(x + (1 - |x|^2)(-x) \right) = \frac{x|x|^2}{|x|^2} = x \\
 \phi_x(x) &= \frac{1}{|x|^2} \left(x + (1 - |x|^2) \frac{x - \frac{x}{|x|^2}}{\left| x - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} \right) = \frac{1}{|x|^2} \frac{x \left(|x|^2 - 2 + \frac{1}{|x|^2} \right) + (1 - |x|^2) \left(x - \frac{x}{|x|^2} \right)}{\left| x - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} = 0.
 \end{aligned}$$

zu(d): *Hilfssatz* 29 ist hier nützlich bei der Berechnung der Jacobi-Determinante:

$$\begin{aligned}
 [\phi_x(y)]_i &= \frac{1}{|x|^2} \left(x_i + (1 - |x|^2) \frac{y_i - \frac{x_i}{|x|^2}}{\left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} \right) \\
 \Rightarrow [D\phi_x(y)]_{ij} &= \frac{\partial}{\partial y_j} [\phi_x(y)]_i = \frac{1 - |x|^2}{|x|^2} \left(\frac{\delta_{ij}}{\left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} - \frac{2(y_i - \frac{x_i}{|x|^2})(y_j - \frac{x_j}{|x|^2})}{\left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^4} \right) \\
 \Rightarrow \det(D\phi_x(y)) &= \left(\frac{1 - |x|^2}{|x|^2 \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} \right)^n \det \left(\delta_{ij} - \frac{2(y_i - \frac{x_i}{|x|^2})(y_j - \frac{x_j}{|x|^2})}{\left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2} \right)_{i,j=1,\dots,n} \\
 \Rightarrow J_{\phi_x}(y) &= (|\det(D\phi_x)(y)| \stackrel{\text{HS} 29}{=} (1 - |x|^2)^n \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{-2n}).
 \end{aligned}$$

zu(e): Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(U)$ bijektiv. Die mehrdimensionale Kettenregel liefert:

$$(\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = D(id_U)(y) = Dg^{-1}(g(y))Dg(y) \Rightarrow 1 = \det(Dg^{-1})(g(y)) \det(Dg)(y),$$

mittels Det.-Multiplikationssatz. Für $g = g^{-1} = \phi_x$ und $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\frac{x}{|x|^2}\}$ folgt die Beh. □

Beweis von Hauptsatz 1:

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass die Boggio-Formel den Randbedingungen genügt:

$$D^\alpha u = 0 \quad \text{auf } \partial B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq m - 1.$$

Dafür schreibt man wieder die obere Integralgrenze von G_m um:

$$\frac{[xy]}{|x-y|} = g(x, y) = \sqrt{1 + \frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}}.$$

Sei nun $x \in \partial B$, d.h. $|x| = 1$. Dann ist $g(x, y) = 1$ und damit $G_m(x, y) = 0$.

Für die Ableitungen genügt mit Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_1^{g(x,y)} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv &= (g(x, y)^2 - 1)^{m-1} g(x, y)^{1-n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x, y) \\ &= \left(\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2} \right)^{m-1} g(x, y)^{1-n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x, y). \end{aligned}$$

Wegen $D_x^\alpha \left(\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2} \right)^{m-1} = \left(\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2} \right)^{m-1} r(x, y) \quad \text{für } |\alpha| = m - 2,$

wobei es sich bei $r(x, y)$ um eine rationale Funktion handelt, folgt mit Produktregel dass:

$$D_x^\alpha G_m(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \partial B \text{ und } |\alpha| \leq m - 1.$$

Die Vertauschbarkeit von Ableitungen und Integral (alle Ableitungen sind beschränkt) liefert damit die Erfüllung der Randbedingungen.

Da zudem $\partial B \in C^\infty \subset C^m$ sowie (Satz 17) $u \in C^\infty(\bar{B}) \subset C^m(\bar{B})$, folgt sogar $u \in H_0^m$.

Die weitere Vorgehensweise orientiert sich an [DG, p.13-14]. Um zu beweisen, dass G_m schwache Lösung zu (1) ist, wird vorbereitend gezeigt dass $(-\Delta_y)^m G_m(x, y) = \delta_x(y)$ im distributionellem Sinne bzgl. B und für alle $x \in B$ gilt.

Sei dazu $\psi \in C_0^\infty(B)$ beliebig, aber fest.

Für $x = 0$ liefert Satz 23 die Behauptung. Sei nun also $x \in B \setminus \{0\}$. Definiere:

$$\tilde{\psi}(y) := J_{\phi_x}^{\frac{n-2m}{2n}}(y) \psi(\phi_x(y)) \stackrel{\text{HS 30(d)}}{=} (1-|x|^2)^{\frac{n-2m}{2}} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2m-n} \psi(\phi_x(y)).$$

Das Inversionszentrum $\frac{x}{|x|^2}$ liegt außerhalb von \bar{B} . Somit ist $\phi_x \in C_0^\infty(\bar{B})$ und folglich auch $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\bar{B})$. Damit ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
 (1 - |x|^2)^{\frac{n-2m}{2}} \psi(x) &\stackrel{\text{HS 30(c)}}{\stackrel{\text{def}}{=}} \tilde{\psi}(0) \stackrel{\text{Satz 23}}{=} \int_B G_m(0, y) (-\Delta)^m \tilde{\psi}(y) dy \\
 &\stackrel{\text{Satz 24}}{=} \int_B G_m(0, y) J_{\phi_x}^{\frac{n+2m}{2n}}(y) \left((-\Delta)^m \psi \right) (\phi_x(y)) dy \\
 &\stackrel{\text{HS 30(a), (c)}}{\stackrel{\text{Trafo}}{=}} \int_B G_m\left(0, \phi_x(y)\right) J_{\phi_x}^{\frac{n+2m}{2n}}\left(\phi_x(y)\right) \left((-\Delta)^m \psi(y) \right) J_{\phi_x}(y) dy \\
 &\stackrel{\text{HS 30(e)}}{=} \int_B G_m\left(0, \phi_x(y)\right) J_{\phi_x}^{\frac{n-2m}{2n}}(y) (-\Delta)^m \psi(y) dy \\
 &\stackrel{\text{HS 30(d)}}{=} (1 - |x|^2)^{\frac{n-2m}{2}} \int_B \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2m-n} G_m\left(0, \phi_x(y)\right) (-\Delta)^m \psi(y) dy.
 \end{aligned}$$

Hier spielt die in *Satz 24* bewiesene Kovarianz von Möbiustransformationen eine entscheidende Rolle! Es folgt:

$$\psi(x) = \int_B \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2m-n} G_m\left(0, \phi_x(y)\right) (-\Delta)^m \psi(y) dy.$$

Also ergibt sich wegen

$$G_m(0, \phi_x(y)) \stackrel{\text{def}}{=} k_{m,n} |\phi_x(y)|^{2m-n} \int_1^{1/|\phi_x(y)|} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv \quad , \text{ dass}$$

$$\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2m-n} G_m(0, \phi_x(y)) \stackrel{\text{HS 30(b)}}{=} k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{\frac{|x,y|}{|x-y|}} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv = G_m(x, y),$$

und schließlich

$$\psi(x) = \int_B G_m(x, y) (-\Delta)^m \psi(y) dy, \quad \text{d.h. } (-\Delta_y)^m G_m(x, y) = \delta_x(y). \quad (2)$$

Sei nun: $\psi \in C_0^\infty(B)$, eine Testfunktion. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \int_B u(x) (-\Delta)^m \psi(x) dx &= \int_B \int_B G_m(x, y) f(y) (-\Delta_x)^m \psi(x) dy dx \\
 &\stackrel{\text{Symmetrie}}{\stackrel{\text{von } G_m}{=}} \int_B \left(\int_B G_m(y, x) (-\Delta_x)^m \psi(x) dx \right) f(y) dy \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_B f(y) \psi(y) dy.
 \end{aligned}$$

Somit ist u schwache Lösung von (1). Weil außerdem nach *Satz 17* gilt, dass $u \in C^\infty(\bar{B})$, folgt mit dem Satz von Gauß:

$$\int_B ((-\Delta)^m u(x)) \psi(x) dx = \int_B f(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(B).$$

Das Fundamental-Lemma der Variationsrechnung und Stetigkeit von f liefern nun:

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x), \quad \forall x \in B,$$

d.h. u definiert nach Boggio ist sogar eine klassische Lösung.

Zum Beweis der Eindeutigkeit: Sei $v \in H_0^m$ eine weitere Lösung von (1).

Dann ist $u - v \in H_0^m$ und $\forall \varphi \in H_0^m : \langle (u - v), \varphi \rangle_{H_0^m} = 0$.

Wählt man speziell $\varphi = u - v$, so erhält man $\|u - v\|_{H_0^m}^2 = 0$, also $u = v$ in H_0^m .

Damit ist die Boggio-Formel sogar als schwache Lösung eindeutig. □

7 Boggio-Formel im Halbraum

Weiterführend lassen sich nun auch Randwertprobleme im Halbraum behandeln, von der Form:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{in } \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}, \\ D^\alpha u = 0 & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq m-1, \end{cases} \quad (3)$$

wobei eine Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ vorgeben ist. Die Existenz einer Lösung folgt mittels einer Möbiustransformation vom Halbraum \mathbb{R}_+^n auf die Einheits-Kugel B aus der Boggio-Formel in B . Die entsprechende Boggio-Formel in \mathbb{R}_+^n hat, wegen der Kovarianz bezüglich Möbiustransformationen, bis auf die obere Integralgrenze, dieselbe Gestalt wie in B . Laut [GGS, S.49, Bem.2.28] gilt bei $n > 2m$ Eindeutigkeit und für $n \leq 2m$ lässt sich für manche Fälle auch Eindeutigkeit unter Hinzunahme von Randbedingungen im Unendlichen erzielen.

Satz 31. Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Die im Sinne von Hauptsatz 1 für den Halbraum \mathbb{R}_+^n analoge Boggio-Formel lautet:

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}_+^n} G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(x, y) f(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n,$$

wobei wir setzen:

$$G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(x, y) := k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{\frac{|x^* - y|}{|x - y|}} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv,$$

mit $x^* := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $k_{m,n}$ wie gewohnt.

Die Vorgehensweise ist wie beim Beweis vom Hauptsatz 1. Wir machen Gebrauch von der Inversion j bezüglich der Sphäre $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^{n-1}(-e_1)$, d.h. mit $j(x) = 2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\}$.

Hilfssatz 32. Für die Inversion j bezüglich der Sphäre $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^{n-1}(-e_1)$ gilt:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\} : j(j(x)) = x$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\} : |j(x)| = \frac{|x-e_1|}{|x+e_1|}$
- (c) $j(B) = \mathbb{R}_+^n$ und $j(\mathbb{R}_+^n) = B$, d.h. j vermittelt einen Diffeomorph. zwischen B und \mathbb{R}_+^n
- (d) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\} : J_j(x) = \frac{2^n}{|x+e_1|^{2n}}$
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\} : J_j(j(x)) = \frac{1}{J_j(x)}$.

Beweis. zu(a): $j(j(x)) = 2 \frac{j(x)+e_1}{|j(x)+e_1|^2} - e_1 = 2 \frac{2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1 + e_1}{|2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1 + e_1|^2} - e_1 = x$

zu(b): $|j(x)|^2 = (2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1)^2 = \frac{4}{|x+e_1|^2} - 4 \frac{x_1+1}{|x+e_1|^2} + 1 = \frac{-4x_1+(|x|^2+2x_1+1)}{|x+e_1|^2} = \frac{|x-e_1|^2}{|x+e_1|^2}$

zu(c): $j(B) \subseteq \mathbb{R}_+^n$: Sei $x \in B$, d.h. $|x| < 1$. Dann gilt:

$$[j(x)]_1 = [2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1]_1 = 2 \frac{x_1+1}{|x|^2+2x_1+1} - 1 > 2 \frac{x_1+1}{2x_1+2} - 1 = 0. \text{ Somit ist } j(x) \in \mathbb{R}_+^n.$$

$j(\mathbb{R}_+^n) \subseteq B$: Sei $x \in \mathbb{R}_+^n$, d.h. $x_1 > 0$. Dann gilt:

$$|j(x)|^2 = \frac{|x-e_1|^2}{|x+e_1|^2} < 1 \Leftrightarrow -2x_1 < 2x_1 \Leftrightarrow x_1 > 0. \text{ Somit ist } j(x) \in B.$$

Da j selbstinvers ist, folgt auch $\mathbb{R}_+^n = j(j(\mathbb{R}_+^n)) \subseteq j(B)$ sowie $B = j(j(B)) \subseteq j(\mathbb{R}_+^n)$.

zu (d): Für die Jacobimatrix ergibt sich:

$$[Dj(x)]_{i,k} = \partial_k [j(x)]_i = \partial_k \left(2 \frac{x_i + \delta_{1i}}{|x + e_1|^2} - \delta_{1i} \right) = \frac{2\delta_{ik}}{|x + e_1|^2} + 4 \frac{(x_i + \delta_{1i})(x_k + \delta_{1k})}{|x + e_1|^4},$$

und damit mittels *Hilfssatz* 29 für die Jacobi-Determinante:

$$J_j(x) = |\det(Dj(x))| = \left| \frac{2^n}{|x + e_1|^{2n}} \det \left(\delta_{ik} - \frac{2(x_i + \delta_{1i})(x_k + \delta_{1k})}{|x + e_1|^2} \right)_{i,k} \right| \stackrel{\text{HS 29}}{=} \frac{2^n}{|x + e_1|^{2n}}.$$

zu (e): $J_j(j(x)) \stackrel{(d)}{=} \frac{2^n}{|j(x)+e_1|^{2n}} = \frac{2^n}{|2 \frac{x+e_1}{|x+e_1|^2} - e_1 + e_1|^{2n}} = 2^{-n} |x + e_1|^{2n} \stackrel{(d)}{=} \frac{1}{J_j(x)}$ oder wie bei HS 30(e). □

Beweis zu Satz 31:

Beweis. Das Vorgehen ist analog zum Beweis von *Hauptsatz* 1. Seien nun stets $\xi, \eta \in \mathbb{R}_+^n$ und $x, y \in B$ mit $x = j(\xi), y = j(\eta) \in B$. Es wird zunächst gezeigt, dass für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$:

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(\xi, \eta) (-\Delta)^m \psi(\eta) d\eta, \quad \text{gilt.} \tag{4}$$

Definiere $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(B)$ durch $\tilde{\psi}(x) := J_j^{\frac{n-2m}{2n}}(x)\psi(j(x))$. Dann gilt wegen (2) und Satz 29:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &\stackrel{(2)}{=} \int_B G_m(x, y)(-\Delta)^m \tilde{\psi}(y) dy \stackrel{\text{Satz 29}}{=} \int_B G_m(x, y) J_j^{\frac{n+2m}{2n}}(y)(-\Delta)^m \psi(j(y)) dy \\ &\stackrel{\text{HS 33(a), (c)}}{\underset{\text{Trafo}}{=}} \int_{\mathbb{R}_+^n} G_m(j(\xi), j(\eta)) J_j^{\frac{n+2m}{2n}}(j(\eta)) \left((-\Delta)^m \psi(\eta) \right) J_j(\eta) d\eta \\ &\stackrel{\text{HS 33(e)}}{=} \int_{\mathbb{R}_+^n} G_m(j(\xi), j(\eta)) J_j^{\frac{n-2m}{2n}}(\eta)(-\Delta)^m \psi(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Also folgt mittels *Hilfssatz 33(e)*: $\psi(\xi) = J_j^{\frac{n-2m}{2n}}(\xi) \int_H J_j^{\frac{n-2m}{2n}}(\eta) G_m(j(\xi), j(\eta)) (-\Delta)^m \psi(\eta) d\eta$.

$$(4) \text{ ergibt sich somit, falls gilt: } \left(J_j(\xi) J_j(\eta) \right)^{\frac{n-2m}{2n}} G_m(j(\xi), j(\eta)) = G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(\xi, \eta). \quad (5)$$

Das folgt aus: $(J_j(\xi) J_j(\eta))^{\frac{n-2m}{2n}} |j(\xi) - j(\eta)|^{2m-n} = |\xi - \eta|^{2m-n}$ (5.1), $\frac{[j(\xi), j(\eta)]}{|j(\xi) - j(\eta)|} = \frac{|\xi^* - \eta|}{|\xi - \eta|}$ (5.2).

$$\begin{aligned} \frac{[j(\xi), j(\eta)]^2}{|j(\xi) - j(\eta)|^2} &= \frac{\left| |j(\xi)| |j(\eta)| - \frac{j(\xi)}{|j(\xi)|} \right|^2}{|j(\xi) - j(\eta)|^2} = \frac{|j(\xi)|^2 |j(\eta)|^2 - 2j(\xi) \cdot j(\eta) + 1}{|j(\xi)|^2 - 2j(\xi) \cdot j(\eta) + |j(\eta)|^2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{|\xi^* - \eta|^2}{|\xi - \eta|^2} = \frac{|\xi - 2\xi_1 e_1 - \eta|^2}{|\xi - \eta|^2} = \frac{|\xi|^2 - 4\xi_1^2 - 2\xi \cdot \eta + 4\xi_1^2 + 4\xi_1 \eta_1 + |\eta|^2}{\underbrace{|\xi|^2 - 2\xi \cdot \eta + |\eta|^2}_{=:c}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c \left(|j(\xi)|^2 |j(\eta)|^2 - 2j(\xi) \cdot j(\eta) + 1 \right) \stackrel{!}{=} (c + 4\xi_1 \eta_1) \left(|j(\xi)|^2 - 2j(\xi) \cdot j(\eta) + |j(\eta)|^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow c \left(|j(\xi)|^2 |j(\eta)|^2 + 1 \right) \stackrel{!}{=} (c + 4\xi_1 \eta_1) \left(|j(\xi)|^2 + |j(\eta)|^2 \right) - 8\xi_1 \eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta)$$

Es ist nun übersichtlicher die linke und rechte Seite jeweils einzeln zu betrachten. Für die linke Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} c \left(|j(\xi)|^2 |j(\eta)|^2 + 1 \right) &= c \left(\frac{|\xi - e_1|^2 |\eta - e_1|^2}{|\xi + e_1|^2 |\eta + e_1|^2} + 1 \right) = c \left(\frac{|\xi - e_1|^2 |\eta - e_1|^2 + |\xi + e_1|^2 |\eta + e_1|^2}{|\xi + e_1|^2 |\eta + e_1|^2} \right) \\ &= \frac{c}{\underbrace{|\xi + e_1|^2 |\eta + e_1|^2}_{=:a}} \left((|\xi|^2 - 2\xi_1 + 1)(|\eta|^2 - 2\eta_1 + 1) + (|\xi|^2 + 2\xi_1 + 1)(|\eta|^2 + 2\eta_1 + 1) \right) \\ &= \frac{c}{a} \left(|\xi|^2 |\eta|^2 - 2|\xi|^2 \eta_1 + |\xi|^2 - 2\xi_1 |\eta|^2 + 4\xi_1 \eta_1 - 2\xi_1 + |\eta|^2 - 2\eta_1 + 1 \right. \\ &\quad \left. + |\xi|^2 |\eta|^2 + 2|\xi|^2 \eta_1 + |\xi|^2 + 2\xi_1 |\eta|^2 + 4\xi_1 \eta_1 + 2\xi_1 + |\eta|^2 + 2\eta_1 + 1 \right) \\ &= \frac{c}{a} \left(2|\xi|^2 |\eta|^2 + 2|\xi|^2 + 8\xi_1 \eta_1 + 2|\eta|^2 + 2 \right). \end{aligned}$$

Betrachtet man die rechte Seite erhält man: $(c + 4\xi_1\eta_1) \left(|j(\xi)|^2 + |j(\eta)|^2 \right) - 8\xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta)$

$$\begin{aligned}
 &= (c + 4\xi_1\eta_1) \left(\frac{|\xi - e_1|^2|\eta + e_1|^2 + |\xi + e_1|^2|\eta - e_1|^2}{|\xi + e_1|^2|\eta + e_1|^2} \right) - 8\xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta) \\
 &= \frac{(c + 4\xi_1\eta_1)}{a} \left((|\xi|^2 - 2\xi_1 + 1)(|\eta|^2 + 2\eta_1 + 1) + (|\xi|^2 + 2\xi_1 + 1)(|\eta|^2 - 2\eta_1 + 1) \right) - 8\xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta) \\
 &= \frac{(c + 4\xi_1\eta_1)}{a} \left((|\xi|^2|\eta|^2 + 2|\xi|^2\eta_1 + |\xi|^2 - 2\xi_1|\eta|^2 - 4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1 + |\eta|^2 + 2\eta_1 + 1 \right. \\
 &\quad \left. + |\xi|^2|\eta|^2 - 2|\xi|^2\eta_1 + |\xi|^2 + 2\xi_1|\eta|^2 - 4\xi_1\eta_1 + 2\xi_1 + |\eta|^2 - 2\eta_1 + 1) \right) - 8\xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta) \\
 &= \frac{(c + 4\xi_1\eta_1)}{a} \left(2|\xi|^2|\eta|^2 + 2|\xi|^2 - 8\xi_1\eta_1 + 2|\eta|^2 + 2 \right) - 8\xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta) .
 \end{aligned}$$

Die gewünschte Äquivalenz von linker und rechter Seite führt also auf:

$$16\xi_1\eta_1 \left(|\xi|^2 - 2\xi \cdot \eta + |\eta|^2 \right) = 16\xi_1\eta_1 c \stackrel{!}{=} 8\xi_1\eta_1 \left(|\xi|^2|\eta|^2 + |\xi|^2 - 4\xi_1\eta_1 + |\eta|^2 + 1 \right) - 8a \xi_1\eta_1 j(\xi) \cdot j(\eta)$$

Es verbleibt $a j(\xi) \cdot j(\eta)$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 a \left(2 \frac{\xi + e_1}{|\xi + e_1|^2} - e_1 \right) \left(2 \frac{\eta + e_1}{|\eta + e_1|^2} - e_1 \right) &= a \left(4 \frac{\xi \cdot \eta + \xi_1 + \eta_1 + 1}{|\xi + e_1|^2|\eta + e_1|^2} - 2 \frac{\xi_1 + 1}{|\xi + e_1|^2} - 2 \frac{\eta_1 + 1}{|\eta + e_1|^2} + 1 \right) \\
 &= 4(\xi \cdot \eta + \xi_1 + \eta_1 + 1) - 2(\xi_1 + 1)(|\eta|^2 + 2\eta_1 + 1) - 2(\eta_1 + 1)(|\xi|^2 + 2\xi_1 + 1) + |\xi + e_1|^2|\eta + e_1|^2 \\
 &= 4\xi \cdot \eta + 4\xi_1 + 4\eta_1 + 4 - 2\xi_1|\eta|^2 - 4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1 - 2|\eta|^2 - 4\eta_1 - 2 - 2\eta_1|\xi|^2 - 4\eta_1\xi_1 - 2\eta_1 \\
 &\quad - 2|\xi|^2 - 4\xi_1 - 2 + \left(|\xi|^2|\eta|^2 + 2|\xi|^2\eta_1 + |\xi|^2 + 2\xi_1|\eta|^2 + 4\xi_1\eta_1 + 2\xi_1 + |\eta|^2 + 2\eta_1 + 1 \right) \\
 &= |\xi|^2|\eta|^2 - |\xi|^2 - |\eta|^2 + 4\xi \cdot \eta - 4\xi_1\eta_1 + 1
 \end{aligned}$$

Damit wird die obere rechte Seite zu: $8\xi_1\eta_1 \left(|\xi|^2|\eta|^2 + |\xi|^2 - 4\xi_1\eta_1 + |\eta|^2 + 1 - a j(\xi) \cdot j(\eta) \right)$

$$= 8\xi_1\eta_1 (2|\xi|^2 + 2|\eta|^2 - 4\xi\eta) \stackrel{!}{=} 16\xi_1\eta_1 (|\xi|^2 - 2\xi\eta + |\eta|^2) \quad , \text{ was der linken Seite entspricht.}$$

(5.2) ist demnach bewiesen. (5.1) lässt sich unkomplizierter verifizieren:

$$\begin{aligned}
 (J_j(\xi)J_j(\eta))^{\frac{n-2m}{2n}} |j(\xi) - j(\eta)|^{2m-n} &\stackrel{\text{HS 32(d)}}{=} \left(\left| \frac{2^n}{|\xi + e_1|^{2n}} \frac{2^n}{|\eta + e_1|^{2n}} \right)^{\frac{n-2m}{2n}} \left| 2 \frac{\xi + e_1}{|\xi + e_1|^2} - 2 \frac{\eta + e_1}{|\eta + e_1|^2} \right|^{2m-n} \right. \\
 &= (|\xi + e_1||\eta + e_1|)^{2m-n} \left| \frac{\xi + e_1}{|\xi + e_1|^2} - \frac{\eta + e_1}{|\eta + e_1|^2} \right|^{2m-n} = \left| \frac{(\xi + e_1)|\eta + e_1|}{|\xi + e_1|} - \frac{(\eta + e_1)|\xi + e_1|}{|\eta + e_1|} \right|^{2m-n} \\
 &= \left| |\eta + e_1|^2 - 2(\xi + e_1) \cdot (\eta + e_1) + |\xi + e_1|^2 \right|^{\frac{2m-n}{2}} = \left| |\eta|^2 - 2\xi\eta + |\xi|^2 \right|^{\frac{2m-n}{2}} = |\xi - \eta|^{2m-n} .
 \end{aligned}$$

Sei nun: $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, eine Testfunktion. Aufgrund von (5) und der Symmetrie von G_m ist auch $G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}$ symmetrisch. Es folgt analog wie in Abschnitt 6:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x)(-\Delta)^m \psi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(x, y) f(y) (-\Delta_x)^m \psi(x) dy dx \\ &\stackrel{\text{Symmetrie von}}{=} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} G_{(-\Delta)^m, \mathbb{R}_+^n}(y, x) (-\Delta_x)^m \psi(x) dx \right) f(y) dy \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Somit ist u schwache Lösung von (3). Weiterhin folgt aus Satz 17, dass: $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ - ohne Beweis. Mit dem Satz von Gauß folgt:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} ((-\Delta)^m u(x)) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n).$$

Das Fundamental-Lemma der Variationsrechnung und Stetigkeit von f liefern nun:

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n,$$

d.h. u ist sogar eine klassische Lösung.

Zu den Randbedingungen:

Sei $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ d.h., $x_1 = 0$. Dann ist $x^* = x$ und die obere Integralgrenze $\frac{|x^*-y|}{|x-y|} = 1$, also $u(x) = 0$. Für die Ableitungen genügt mit Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu betrachten:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_1^{\frac{|x^*-y|}{|x-y|}} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv = \left(\left(\frac{|x^*-y|}{|x-y|} \right)^2 - 1 \right)^{m-1} \left(\frac{|x^*-y|}{|x-y|} \right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{|x^*-y|}{|x-y|}.$$

$$\text{Wegen } D_x^\alpha \left(\left(\frac{|x^*-y|}{|x-y|} \right)^2 - 1 \right)^{m-1} = \left(\left(\frac{|x^*-y|}{|x-y|} \right)^2 - 1 \right) h(x, y) \quad \text{für } |\alpha| = m-2,$$

für eine glatte Funktion $h(x, y)$, folgt mit Produktregel dass:

$$D_x^\alpha G_m(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\mathbb{R}_+^n \text{ und } |\alpha| \leq m-1.$$

□

Ich danke Prof. Grunau für seine Geduld mit mir und für seine hilfreichen Hinweise, während der Betreuung. Darüber hinaus danke ich Prof. Simon dafür, dass er sich die Zeit nimmt, meine Arbeit zu begutachten.

8 Zusatz: Die Fundamentallösung $F_{m,n}$ (elegante Variante)

Prof. Grunau hat angeregt, dass sich der Beweis zu Satz 22 noch verbessern ließe mit folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 33. Sei $m \geq 2$. Dann gilt für $x \neq 0$:

$$(-\Delta)F_{m,n}(x) = F_{m-1,n}(x) + h(x) \text{ wobei } h \text{ ein Polynom in } |x|^2 \text{ vom Grade } < \frac{2m-2}{2} .$$

Beweis. 1.Fall ($n > 2m$ oder n ungerade):

$$(-\Delta)F_{m,n}(x) = -c_{m,n}\Delta|x|^{2m-n} \stackrel{\text{HS 19}}{(***)} \frac{-2\Gamma(n/2 - m)}{ne_n 4^m \Gamma(n/2)(m-1)!} 2(m-1)(2m-n)|x|^{2(m-1)-n}$$

$$\stackrel{\text{s. Beweis von HS 16}}{=} \frac{-2(m - \frac{n}{2})}{\left(\prod_{j=1}^m \frac{n}{2} - j\right)} \frac{1}{ne_n 4^{m-1}(m-2)!} |x|^{2(m-1)-n} = F_{m-1,n}(x)$$

Also ist die Behauptung erfüllt für $h(x) \equiv 0$.

2.Fall ($n \leq 2m$ und n gerade): $(-\Delta)F_{m,n}(x) = c_{m,n}\Delta(|x|^{2m-n} \log(x))$

$$\stackrel{\text{HS 20}}{\text{(IA)}} \frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}} 2(m-1)(2m-n) \log|x|}{ne_n 4^{m-1} \Gamma(n/2)(m-n/2)!(m-1)!} |x|^{2(m-1)-n} + \underbrace{c_{m,n}(4m-n-2)|x|^{2(m-1)-n}}_{=:h(x)}$$

$$= \frac{-\log|x| (-1)^{(m-1)-\frac{n}{2}} 4}{ne_n 4^{m-1} \Gamma(n/2)((m-1) - \frac{n}{2})!(m-2)!} |x|^{2(m-1)-n} + h(x) = F_{m-1,n} + h(x)$$

□

Beweis von Satz 22 (elegant):

Beweis. Wie im Beweis von Satz 22 verbleibt zunächst nur ein Oberflächenterm. Mit mehrmaliger Anwendung von *Hilfssatz 33* ergibt sich:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^m \psi(y) F_{m,n}(y) dy = \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\epsilon} \psi(y) \partial_i \underbrace{(-\Delta)^{m-1} F_{m,n}(y)}_{\stackrel{m \neq 1}{=} (-\Delta)^{m-2} (F_{m-1,n}(x) + h(x))} \frac{-y_i}{|y|} dS(y)$$

$$= \dots = \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\epsilon} \psi(y) \partial_i F_{1,n} \frac{-y_i}{|y|} dS(y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y|=\epsilon} \psi(y) \left(-\frac{1}{ne_n} \frac{y_i}{|y|} \right) \frac{-y_i}{|y|} dS(y) = \psi(x)$$

Dabei handelt es sich bei $F_{1,n}$ um die singuläre Grundlösung vom Laplacoperator im \mathbb{R}^n .

□

Literatur

- [A] S. Agmon. Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 77–80, 1960.
- [ADN (i)] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.* 12, 623–727, 1959.
- [ADN (ii)] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Comm. Pure Appl. Math.* 17, 35–92, 1964.
- [ADFJS] N. Abatangelo, S. Dipierro, M. M. Fall, S. Jarohs, A. Saldaña. Positive powers of the Laplacian in the half-space under Dirichlet boundary conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A* 39, 1205-1235, 2019.
- [Bl] D. E. Blair. *Inversion theory and conformal mapping*. Student Mathematical Library 9, American Mathematical Society: Providence, 2000.
- [Bo] T. Boggio. Sulle funzioni di Green d'ordine m . *Rend. Circ. Mat. Palermo* 20, 97-135, 1905.
- [DG] S. Dipierro, H.-Ch. Grunau. Boggio's formula for fractional polyharmonic Dirichlet problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 196, 1327-1344, 2017.
- [DN] A. Douglis, L. Nirenberg. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 8, 503–538, 1955.
- [DS] A. Dall'Acqua, G. Sweers. On domains for which the clamped plate system is positivity preserving. *American Mathematical Society, Partial differential equations and inverse problems, Contemp. Math.* 362, 133–144, 2004.
- [GGS] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, G. Sweers. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. *Springer Lecture Notes in Mathematics* 1991, Springer-Verlag: Berlin etc., 2010.
- [Ham] R. W. Hamming. An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions. *The American Mathematical Monthly* 77, 294-297, 1970.
- [Har] P. Hartman. On isometries and on a theorem of Liouville, *Math. Z.* 69, 202-210, 1958.
- [Liou] J. Liouville. Extension au cas des trois dimensions de la question du trace géographique. Application de l'Analyse à la Géométrie 5 (par G. Monge), Note VI, 609-616, 1850.
- [Loe] Ch. Loewner. On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings. *Pacific Journal of Mathematics* 3, 417-436, 1953.
- [Ne] R. Nevanlinna. On differentiable mappings. *Analytic Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton Math. Ser. 24, 3-9, 1960.
- [Re] Yu. G. Reshetnyak. Space mappings with bounded distortion. *Translations of Mathematical Monographs* 73, American Mathematical Society: Providence, 1989.

9 Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum, Unterschrift