Axialsymmetrische Minimierer des Helfrich-Funktionals

Masterarbeit

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik

Marco Doemeland
geboren am 24.02.1990 in Magdeburg
Matrikelnummer: 187840

Betreuer & Gutachter	Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau
Betreuer & Gutachter	Prof. Dr. Klaus Deckelnick

Eingereicht am	9. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung sind Gegenstand aktueller Forschung in der Mathematik. Viele Prinzipien und Techniken aus der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie beispielsweise das Maximumprinzip, lassen sich allerdings nicht auf Differentialgleichungen höherer Ordnungen verallgemeinern. So tauchen oftmals Probleme und sogar ganz neue Phänomene auf, welche es zunächst an speziellen Beispielen zu verstehen gilt. Ein geometrisch motiviertes Beispiel einer Differentialgleichung vierter Ordnung ist die **Willmore-Gleichung**

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) \;=\; 0\,.$$

Dabei ist H die mittlere Krümmung einer in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ isometrisch eingebetteten Fläche $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$, welche ein Maß dafür ist, wie sehr sich ein Pfad, welcher auf der Fläche verläuft, im umgebenen Raum im Mittel krümmen wird. Die Gauß-Krümmung K wiederum ist ein Maß für die innere Krümmung der Fläche bezüglich der ersten Fundamentalform g. Da der Laplace-Beltrami-Operator Δ_g bezüglich g von der Fläche und damit der Lösung der Willmore-Gleichung selbst abhängt, ist die Willmore-Gleichung eine nichtlineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Komponenten der Einbettung f. Lösungen dieser nennt man auch **Willmore-Flächen**. Die Willmore-Gleichung beschreibt kritische Punkte des **Willmore-Funktionals**

$$\mathcal{W}(f) \;:=\; \int_{\mathcal{M}} H^2 \;\mathrm{d}\mu_g\,.$$

Dieses wurde bereits von Poisson studiert (siehe [Poisson, 1812]) und in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts von T. J. Willmore popularisiert (siehe [Willmore, 1965]), nach dem es dann schließlich auch benannt wurde. Die Berechnung der Willmore-Gleichung als Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktionals geht auf [Thomson, 1923] zurück. Das Willmore-Funktional kann als eine natürliche Modifikation des Flächenfunktionals angesehen werden, welches die Forschung nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung stark beeinflusst hat. Ähnliches lässt sich vom Willmore-Funktional für Differentialgleichungen vierter Ordnung erhoffen. In der Theorie von Willmore-Flächen konnten bereits viele Resultate zu geschlossenen Flächen gezeigt werden, wie beispielsweise die Existenz von Willmore-Flächen beliebigen topologischen Geschlechts (siehe [Lawson, 1970] und [Simon, 1993]). Dagegen sind Randwertprobleme für die Willmore-Gleichung relativ wenig untersucht und Gegenstand aktueller Forschung.

Physikalische Anwendungen des Willmore-Funktionals finden sich in der Modellierung dünner elastischen Platten oder dünner Biomembranen (siehe z. B. [Ou-Yang, 2001]). Als Integral über das Quadrat der mittleren Krümmung stellt das Willmore-Funktional allerdings eine starke Idealisierung dar. Realistischere Beschreibungen solcher Situationen berücksichtigen unter anderem Einflüsse der Ausdehnung und mögliche Spontankrümmungen der zu modellierenden Fläche. Im Kontrast zum Willmore-Funktional stellt das **Flächenfunktional**

$$\mathcal{A}(f) \;:=\; \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\mu_g$$

einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ selbst auch eine, wenn auch wieder stark idealisierte, mögliche elastische Energie dar, welche lediglich Ausdehnungen der Flächen berücksichtigt, aber keine Krümmungen. Als ein bekanntes physikalisches Beispiel für das Flächenfunktional als elastische Energie dienen beispielsweise Seifenblasen (siehe z. B. [*Oprea, 2000*]). Ein relativ allgemeiner Ansatz für elastische Energien dagegen ist das Integral

$$\mathcal{E}(f) := \int_{\mathcal{M}} \Phi(H,K)\ \mathrm{d}\mu_g$$

über eine von H und K abhängigen Energiedichte $\Phi(H,K)$ bezüglich Immersionen $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$. Als eine erste Näherung und mit der Forderung, dass die elastische Energie in der Hinsicht definit ist, dass $\mathcal{E}(f)$ für alle möglichen Immersionen $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ von Flächen $\mathcal{M}$ durch eine Konstante $c > -\infty$ nach unten beschränkt ist, ergibt sich die Energiedichte in der Form

$$\Phi(H,K) = \varepsilon + \varrho(H - H_0)^2 - \sigma K$$

mit Konstanten $\varepsilon \geq 0$, $0 \leq \sigma \leq \varrho$ und einer Spontankrümmung $H_0 \in \mathbb{R}$ (siehe auch [Nitsche, 1993]). Die dazugehörige elastische Energie wird auch als **Nitsche-Funktional** bezeichnet, welches insbesondere das Willmore- und das Flächenfunktional als Spezialfälle beinhaltet. In den Pionierarbeiten (siehe z. B. [Helfrich, 1973], [Canham, 1970] oder [Evans, 1974]) war man unter anderem an der Beschreibung der Gestalt roter Blutkörperchen interessiert. In dieser Arbeit wollen wir das **Helfrich-Funktional**

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f) := \mathcal{W}(f) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f) = \int_{\mathcal{M}} H^2\ \mathrm{d}\mu_g + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\mu_g$$

als Spezialfall des Nitsche-Funktionals mit $\varrho = 1$, $H_0 = 0$ und $\sigma = 0$ als eine Modifikation des Willmore-Funktionals um das mit dem mit ε gewichteten Flächenfunktional studieren. Ähnlich wie beim Willmore-Funktional scheint das Helfrich-Funktional bereits lange bekannt gewesen und schon von W. Schadow studiert worden zu sein (siehe [Schadow, 1922]), wurde dann später aber durch W. Helfrich popularisiert (siehe [Helfrich, 1973]), nach dem es benannt ist. Die Wahl $\sigma = 0$ stellt für Randwertprobleme keine große Einschränkung dar, da das Integral über K nach dem Satz von Gauß-Bonnet in Randterme und eine topologische Invariante zerfällt. Kritische Punkte des Helfrich-Funktionals erfüllen die **Helfrich-Gleichung**

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) - 2\varepsilon H = 0$$

und werden auch als **Helfrich-Flächen** bezeichnet. Nicht nur in physikalischen Anwendungen, sondern auch aus rein mathematischer Sicht ist es interessant, Minimierer des Helfrich-Funktionals in bestimmten Klassen von Flächen als Beispiele von Lösungen der Helfrich-Gleichung zu studieren.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf Randwertprobleme für Helfrich-Flächen in der Klasse der **Rotationsflächen**, deren Profilkurven als Graph einer Funktion gegeben sind (siehe Bild 0.1). Rotationsflächen besitzen in der Hinsicht eine einfache geometrische Struktur, als dass dazugehörige Probleme sich als eindimensionale Probleme für die Profilkurve der Rotationsfläche interpretieren lassen. Trotzdem erscheint die Analysis axialsymmetrischer Helfrich-Flächen hinreichend komplex, um von diesen lernen zu können. Wir interessieren uns in der Arbeit für die Existenz und die

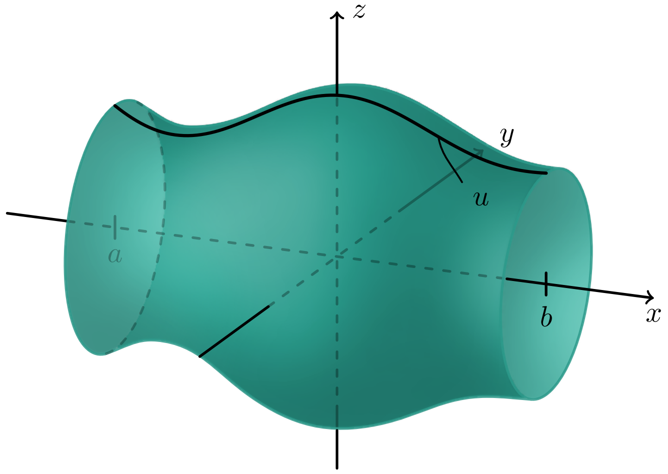


Bild 0.1: Darstellung einer Rotationsfläche mit Profilkurve u.

Eigenschaften von Minimierern des Helfrich-Funktionals in den Klassen von Rotationsflächen vorgegebener Dirichlet-Randdaten, deren Profilkurven Elemente der Menge

$$H_\alpha := \left\{ u \in H^2(-1,1) : \ u \text{ ist gerade}, \ u > 0, \ u(\pm 1) = \alpha, \ u'(\pm 1) = 0 \right\}$$

sind. Als Lösungsstrategie für den Beweis der Existenz eignet sich wegen der lokalen schwachen Folgenkompaktheit von $H^2(-1,1)$ die *direkte Methode der Variationsrechnung*. Weiter lässt sich zeigen, dass schwache Lösungen der Helfrich-Gleichung in H_α automatisch glatt sind, sodass die zu findenden Helfrich-Minimierer also klassische Lösungen der Helfrich-Gleichung sind.

Dirichlet-Randwertprobleme für die Willmore-Gleichung sind mittlerweile schon recht ausführlich studiert. Angefangen mit der Arbeit [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008], in welcher Willmore-Minimierer in H_α gefunden wurden, und [Dall'Acqua et al., 2011], welche das Resultat auf beliebige symmetrische Dirichlet-Randdaten verallgemeinern konnte, ließen sich in [Eichmann und Grunau, 2017] mittlerweile auch axialsymmetrische Willmore-Flächen zu unsymmetrischen Randdaten finden. Interessant ist vor allem auch, dass sich nach [Eichmann und Koeller, 2017] zu den symmetrischen Randdaten $u(\pm 1) = \alpha$ und $u'(\pm 1) = 0$ stets Willmore-Minimierer finden lassen, welche in H_α liegen und damit ebenso symmetrisch sind. Letztendlich konnte in [Eichmann, 2016] auch gezeigt werden, dass es Randwerte α gibt, für die mehr als nur eine Willmore-Fläche existiert.

Dirichlet-Randwertprobleme für das Helfrich-Funktional dagegen sind kaum untersucht. So konnte in [Scholtes, 2011] gezeigt werden, dass zu jedem Flächenanteil ε und hinreichend großen Randwerten α die Existenz von Helfrich-Minimierern in H_α gesichert ist. Dieses Resultat basiert auf Vergleichen mit Zylindern. Es lässt sich ein Bereich von (α, ε) finden, in welchem alleine die Tatsache, dass Elemente einer Minimalfolge eine geringere Helfrich-Energie besitzen als die Zylinder zu den gleichen Randdaten, dazu führt, dass die Minimalfolge eine geeignete H^2-Schranke besitzt. Ein Resultat der vorliegenden Arbeit dagegen wird es sein, zu jedem Randwert α und bei hinreichend kleinem Flächenanteil ε die Existenz von Helfrich-Minimierern zu zeigen. Der Beweis basiert auf einem zu [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008] alternativen Existenzsatz von Willmore-Minimierern in H_α, welcher mit einer Energie-Methode gelingt, deren Energie-

Schranke kleine Flächenanteile im Funktional und damit eine Verallgemeinerung auf das Helfrich-Funktional erlaubt. Entscheidend für die Ausnutzung der Energie-Schranke ist die Verwendung des hyperbolischen Willmore-Funktionals als Integral über das Quadrat der geodätischen Krümmung der Profilkurve als Kurve in der hyperbolischen Halbebene, welches sich auch als ein Willmore-Funktional dieser verstehen lässt.

Allgemeine Existenzresultate für beliebige Paare (α, ε) stellen sich als sehr schwierig heraus. Aus diesem Grund wurde in der vorliegenden Arbeit weiter ein numerisches Verfahren entwickelt, das auf einer eindimensionalen Finite-Elemente-Methode basiert. Damit lassen sich unter anderem auch Helfrich-Minimierer in Regimes untersuchen und verstehen, welche einer theoretischen Analyse bisher nicht zugänglich sind. Für die Finite-Elemente-Methode wurden C^1-Elemente verwendet, mit denen die schwache Formulierung der Helfrich-Gleichung in eine diskrete Form gebracht wurde, sodass sich das numerische Lösen der Helfrich-Gleichung auf das Lösen eines nichtlinearen endlichdimensionalen Gleichungssystems reduzieren ließ. Die Anwendung des Verfahrens zeigt unter anderem Regime, in denen keine Monotonie der numerischen Lösungen vorliegt, was eine theoretische Analyse besonders erschwert. Weiter wurde beobachtet, dass es im Raum der Parameter (α, ε) bei stetiger Variation dieser einen Bereich gibt, in dem ein unstetiger Übergang der Helfrich-Minimierer stattfinden zu scheint.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit unterteilt sich grob in zwei Teile. Teil I mit den Kapiteln 1, 2 und 3 beinhaltet die geometrischen Grundlagen und gibt einen Überblick über die geometrische Herleitung der Willmore- und Helfrich-Gleichung im Hinblick auf Rotationsflächen. Die Kapitel 4 bis 7 des zweiten Teils der Arbeit widmen sich der Existenzfrage axialsymmetrischer Minimierer des Helfrich-Funktionals mittels Methoden der Variationsrechnung und versuchen mithilfe einer Finite-Elemente-Methode qualitative Eigenschaften dieser zu beschreiben. Zudem umfasst die Arbeit zwei Anhänge. Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen Beschreibung des Inhalts und teilt sich in weitere Unterkapitel auf. In den jeweiligen Unterkapiteln sind des Öfteren zur besseren Übersicht Abschnitte zu finden wie beispielsweise Sätze, Definitionen, Beispiele und Bemerkungen. Sätze werden stets *kursiv* geschrieben, Beweise mit $\square$ beendet, Definitionen mit $\blacklozenge$ abgeschlossen und am Ende jeder Bemerkung, jedes Beispiels sowie sonstiger Abschnitte befindet sich ein $\blacksquare$. In den jeweiligen Kapiteln neu definierte Begriffe werden **fett** geschrieben und Begriffe, welche das erste Mal verwendet und erst später definiert oder ohne explizite Definition verwendet werden, sind in *kursiver* Schrift gehalten.

Wir wollen das Willmore- und Helfrich-Funktional in dieser Arbeit für relativ allgemeine Situationen und nicht nur für Flächen im $\mathbb{R}^3$ einführen. Aus diesem Grund beschäftigen wir uns in **Kapitel 1** zunächst einmal mit den Begriffen der *äußeren Geometrie* und damit insbesondere mit *immersierten Mannigfaltigkeiten*, für welche sich der Begriff der *mittleren Krümmung* definieren lässt. Für dieses Kapitel fasst **Anhang A** das nötige Hintergrundwissen der Differentialgeometrie zusammen.

Mit der nun eingeführten mittleren Krümmung immersierter Mannigfaltigkeiten werden wir in **Kapitel 2** eine recht allgemeine Definition des *Willmore-Funktionals* als Integral des Quadrates der mittleren Krümmung, dessen erste Variation und Euler-Lagrange-Gleichung angeben. Mit diesem und dem *Flächenfunktional* können wir dann ebenso das *Helfrich-Funktional* einführen.

In **Kapitel 3** betrachten wir *Rotationsflächen* als Beispiele immersierter Mannigfaltigkeiten und berechnen die expliziten Ausdrücke für die in Kapitel 2 eingeführten Funktionale und deren Euler-Lagrange-Gleichungen. Wir erklären auch, wie sich das Willmore-Funktional einer Rotationsfläche mit dem *hyperbolischen Willmore-Funktional* als Willmore-Funktional der Profilkurve eingebettet in die *hyperbolische Halbebene* beschreiben lässt. Zudem diskutieren wir axialsymmetrische Minimalflächen, welche für das Verständnis von axialsymmetrischen Helfrich-Minimierern nützlich sein können.

Kapitel 4 nutzt die in Kapitel 3 berechneten Formeln, um diese in einem der Analysis zugänglichen Kontext für Profilkurven aus dem Sobolev-Raum $H^2(-1,1)$ zu erweitern. Es wird ein hinreichendes Existenzkriterium für Helfrich-Minimierer in H_α gezeigt und ein Regularitätsresultat, was besagt, dass solche Minimierer glatt sind, sodass die Profilkurven insbesondere auch axialsymmetrische Helfrich-Flächen beschreiben. Die funktionalanalytischen Grundlagen und Hilfsmittel, welche in diesem und im nächsten Kapitel verwendet werden, lassen sich auch in **Anhang B** nachlesen.

In **Kapitel 5** geben wir Bereiche im Parameterraum bezüglich der Randdaten α und Flächenanteile ε an, in welchen das Existenzkriterium aus Kapitel 4 erfüllt ist. Zum einen finden wir einen Bereich, welcher sich aus der Verallgemeinerung eines Existenzsatzes für axialsymmetrische Willmore-Minimierern basierend auf einer Energie-Methode ergibt. Zum anderen rekapitulieren wir das Ergebnis aus [Scholtes, 2011] und modifizieren es noch leicht.

Kapitel 6 gibt eine Beschreibung der qualitativen Eigenschaften der Helfrich-Minimierer. Dies wird auf Basis eines numerischen Verfahrens geschehen und ermöglicht somit eine Beschreibung, welche über die in Kapitel 5 gefundenen Existenzbereiche hinaus geht. Neben dem Verhalten der optimalen Helfrich-Energie werden auch das Grenzverhalten und Monotonie-Eigenschaften der Helfrich-Minimierer untersucht.

Das in Kapitel 6 verwendete numerische Verfahren, basierend auf einer eindimensionalen Finite-Elemente-Methode, wird dann letztendlich in **Kapitel 7** ausführlich beschrieben. Auf rigorose Fehlerabschätzungen des Verfahrens wird in dieser Arbeit verzichtet. Stattdessen wird dieses an einigen Beispielen verifiziert und validiert durch die Berechnung der experimentellen Konvergenzordnungen.

Zur besseren Übersicht und Lesbarkeit der Arbeit sind am Ende der Arbeit noch Notationen und ein ausführliches Symbolverzeichnis mit kurzen Erklärungen zu den Symbolen, sowie ein Literatur- und ein Sachverzeichnis zu finden.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich als Autor dieser Arbeit nochmals ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau bedanken. Es ist mir wichtig, dass sich dieser Dank nicht nur auf die Betreuung der Masterarbeit bezieht, sondern viel mehr auch auf die Begleitung und Unterstützung während meines gesamten Studiums. Ein weiterer Dank geht an Herr Prof.

Dr. Klaus Deckelnick für die Betreuung des numerischen Teils der Arbeit und für die Hilfe bei den Fragen und Problemen, die ich hatte.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern Bianka und Jens Doemeland für ihre Geduld und die stetige Unterstützung, ohne die ein solches Studium und eine solche Masterarbeit wohl nicht möglich gewesen wären. Ein weiterer Dank geht auch an Eva Barlage für das Korrekturlesen, für ihren Rückhalt und für ein immer offenes Ohr bei Problemen. Weiter bedanke ich mich auch bei Boris Gulyak für die gemeinsamen Zeiten und die langen und erkenntnisreichen Diskussionen während der gesamten Zeit des Studiums.

Teil I.

Mathematische Beschreibung geometrischer Krümmungsfunktionale

1. Grundlagen der äußeren Geometrie

Wir legen hier die Grundlagen der *äußeren* Geometrie, d. h., wir setzen uns mit geometrischen Größen auseinander, welche die Art und Weise, wie eine Mannigfaltigkeit *eingebettet* ist, beschreiben und welche von dem *ambienten Raum* vorgegeben werden. Insbesondere wird es das Ziel sein, die *mittlere Krümmung* einer *immersierten Mannigfaltigkeit* zu definieren, um mit dieser in Kapitel 2 dann das Willmore- bzw. Helfrich-Funktional einführen zu können.

In Kapitel 1.1 erklären wir dazu die Grundbegriffe *immersierter* und *eingebetteter Mannigfaltigkeiten*. Wir definieren die Begriffe der *ersten* und *zweiten Fundamentalform*, mit denen wir dann die *mittlere Krümmung* solcher Mannigfaltigkeiten einführen können. In den verbleibenden beiden Kapiteln werden wir dann noch zwei verschiedene Situationen von immersierten Mannigfaltigkeiten betrachten und beschreiben, wie die mittlere Krümmung dieser zu verstehen ist. In Kapitel 1.2 betrachten wir die Klasse von eindimensionalen immersierten Mannigfaltigkeiten, also *regulären* Kurven. Kapitel 1.3 dagegen setzt sich mit *Variationen* immersierter Mannigfaltigkeiten auseinander, welche sich als zeitabhängige Immersionen interpretieren lassen.

Die differentialgeometrischen Grundlagen zu Mannigfaltigkeiten, Vektorbündeln und Zusammenhängen lassen sich im Anhang in Kapitel A nachlesen. Die in diesem Kapitel verwendeten Notationen und Konventionen orientieren sich an diesem Anhang. Für weitere Literatur weisen wir auf [*Lee, 2013*], [*Lee, 1997*], [Weiner, 1978] und [Baker, 2010] hin.

1.1. Immersierte und eingebettete Mannigfaltigkeiten

Eingebettete Mannigfaltigkeiten lassen sich als Teilmengen relativ großer Mannigfaltigkeiten auffassen, welche selbst wieder die Struktur einer Mannigfaltigkeit besitzen. Diese lassen sich als Verallgemeinerung des klassischen Begriffs von Flächen im $\mathbb{R}^3$ auffassen. Als Einbettung in eine riemannsche Mannigfaltigkeit übernimmt die eingebettete Mannigfaltigkeit die metrischen Strukturen dieser. Man unterscheidet dann zwischen der *inneren* und *äußeren* Geometrie der Einbettung. Zur *inneren* oder auch *intrinsischen* Geometrie zählen alle Objekte, welche sich über die zurückgezogene Metrik beschreiben lassen und die Einbettung somit als solche gar nicht „wahrnehmen". Dagegen fasst die *äußere* bzw. *extrinsische* Geometrie die Objekte zusammen, welche auf den Normalenräumen, d. h. den zu den Tangentialräumen der Einbettung orthogonalen Räumen, definiert sind.

Wir betrachten hier Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ (bzw. auch mit der Notation $\mathcal{M}^m$ und $\mathcal{N}^n$) der Dimensionen m und n, für welche wir $m < n$ fordern.

1.1.1 Definition (Immersionen und Einbettungen)
Eine glatte Abbildung $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ heißt **Immersion**, falls ihr Differential $\mathrm{d}f_p\colon T_p\mathcal{M}^m \to$

$T_{f(p)}\mathcal{N}^n$ in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}^m$ injektiv ist, sodass $\mathrm{Rang}(\mathrm{d}f_p) = m$. Eine Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ nennt man eine **Einbettung**, falls f ein Homöomorphismus auf ihr Bild $f(\mathcal{M}^m) \subset \mathcal{N}^n$ ist. ♦

Für eine Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ bezeichnet man üblicherweise die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}^n$ als **ambienten Raum**. Die Differenz $\mathrm{codim}(f) := n - m$ wiederum heißt auch die **Kodimension** der Immersion. Ist $\mathrm{codim}(f) = 1$, so nennen wir die Immersion eine **Hyperfläche**. Es lässt sich zeigen, dass eine injektive Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Einbettung ist, falls $\mathcal{M}$ kompakt ist (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 4.22]).

Sei $\mathcal{N}$ nun mit einer riemannschen Struktur versehen, d. h., es sei eine riemannsche Metrik $\tilde{g}$ auf $\mathcal{N}$ gegeben sowie der zu $\tilde{g}$ gehörige Levi-Civita-Zusammenhang $\tilde{\nabla}$. Mittels einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ lassen sich diese Strukturen dann auf $\mathcal{M}$ zurückziehen. Die zurückgezogene Metrik führt auf den Begriff der *ersten Fundamentalform.*

1.1.2 Definition (Erste Fundamentalform)
Als **erste Fundamentalform** oder **Pullback-Metrik** der Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit Metrik $\tilde{g}$ auf $\mathcal{N}$ definieren wir die Metrik $g := f^*\tilde{g}$ auf $\mathcal{M}$. ♦

Dass die erste Fundamentalform in der Tat eine Metrik ist, folgt aus der Definition einer Immersion, welche die Definitheit der Metrik sicherstellt. Mit der ersten Fundamentalform $g = f^*\tilde{g}$ wird $(\mathcal{M}, g)$ zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit, was $f\colon (\mathcal{M}, g) \to (\mathcal{N}, \tilde{g})$ also zu einer isometrischen Immersion macht. Weiter handelt es sich bei dieser insbesondere um ein Objekt der inneren Geometrie.

Die erste Fundamentalform lässt sich auch aus einem weiteren Blickwinkel beschreiben. Betrachten wir das Pullback-Bündel $f^*T\mathcal{N}$ (siehe auch Kapitel A.4) des Tangentialbündels von $\mathcal{N}$ als Vektorbündel über $\mathcal{M}$, so lässt sich $T\mathcal{M}$ in dem Sinne als Unterbündel von $f^*T\mathcal{N}$ auffassen, dass $f_* = \mathrm{d}f_p$ für jedes $p \in \mathcal{M}$ den Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ in $f^*T_{f(p)}\mathcal{N}$ einbettet. Ist g^* die von $\tilde{g}$ induzierte Metrik auf $f^*T\mathcal{N}$, so stimmt diese, eingeschränkt auf $T\mathcal{M}$, mit der Pullback-Metrik g überein.

Neben der metrischen Struktur auf dem Tangentialbündel von $\mathcal{M}$ beschreibt das Pullback-Bündel $f^*T\mathcal{N}$ weiter die Objekte der äußeren Geometrie, da es die *Normalenräume* $N_p\mathcal{M}$ als orthogonale Komplemente der Tangentialräume $T_p\mathcal{M}$ beinhaltet.

1.1.3 Definition (Normalenbündel)
Für die Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit Metrik $\tilde{g}$ auf $\mathcal{N}$ sind die **Normalenräume** $N_p\mathcal{M}$ für $p \in \mathcal{M}$ definiert als

$$N_p\mathcal{M} \;:=\; \big(f_*(T_p\mathcal{M})\big)^\perp \;=\; \Big\{\xi \in (f^*T\mathcal{N})_p : \; g^*_p(\xi, \eta) = 0 \text{ für alle } \eta \in T_p\mathcal{M}\Big\},$$

wobei g^* die induzierte Metrik auf $f^*T\mathcal{N}$ ist und $^\perp$ das orthogonale Komplement bezüglich g^*

beschreibt. Das **Normalenbündel** definiert man dann als die disjunkte Vereinigung

$$N\mathcal{M} := \coprod_{p\in\mathcal{M}} N_p\mathcal{M}\,,$$

welche die Struktur eines Vektorbündels vom Rang $\operatorname{codim}(f)$ über $\mathcal{M}$ besitzt. ♦

Den Nachweis, dass $N\mathcal{M}$ ein Vektorbündel ist, kann man in [*Lee, 2013*, Proposition 13.21] nachlesen. Im faserweisen Sinn ist also $T\mathcal{M} \perp N\mathcal{M}$ zu verstehen und wir haben dann die Zerlegung $f^*T\mathcal{N} = T\mathcal{M} \oplus N\mathcal{M}$. Für diese Zerlegung bezeichnen wir mit

$$^\top\colon f^*T\mathcal{N} \to T\mathcal{M} \qquad \text{und} \qquad {}^\perp\colon f^*T\mathcal{N} \to N\mathcal{M}$$

die Projektionen auf das Tangential- bzw. Normalenbündel, sodass ein $\xi \in (f^*T\mathcal{N})_p$ für $p \in \mathcal{M}$ die eindeutige Darstellung $\xi = \xi^\top + \xi^\perp$ mit $\xi^\top \in T_p\mathcal{M}$ und $\xi^\perp \in N_p\mathcal{M}$ besitzt.

Weiter kann man sich auch fragen, wie der Pullback-Zusammenhang ∇^* des Levi-Civita-Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ der ersten Fundamentalform $g = f^*\tilde{g}$ auf $\mathcal{M}$ zusammenhängt. Bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \nabla^\top &:= {}^\top \circ \nabla^* : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(f^*T\mathcal{N}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,, \\ \nabla^\perp &:= {}^\perp \circ \nabla^* : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(f^*T\mathcal{N}) \to C^\infty(N\mathcal{M}) \end{aligned}$$

die Projektionen des Pullback-Zusammenhangs ∇^* auf das Tangential- bzw. Normalenbündel, so ergeben diese, eingeschränkt auf Schnitte von $T\mathcal{M}$ bzw. $N\mathcal{M}$, wieder Zusammenhänge auf $T\mathcal{M}$ bzw. $N\mathcal{M}$. Es lässt sich zeigen, dass die Einschränkung von $\nabla^\top$ auf $T\mathcal{M}$ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ bezüglich g übereinstimmt (siehe [*Lee, 1997*, Theorem 8.2]), also

$$\nabla_X Y = \nabla^\top_X Y \qquad \text{für } X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \tag{1.1}$$

gilt. Die normale Komponente von ∇^* verdient einen eigenen Namen.

1.1.4 Definition (Zweite Fundamentalform)
Für eine Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit Pullback-Zusammenhang ∇^* bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $(\mathcal{N}, \tilde{g})$ nennen wir die symmetrische $C^\infty(\mathcal{M})$-Bilinearform

$$B\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to C^\infty(N\mathcal{M})\,, \qquad B(X,Y) := \nabla^\perp_X Y = \left(\nabla^*_X Y\right)^\perp,$$

sodass $B \in C^\infty(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \otimes N\mathcal{M})$, die **zweite Fundamentalform**. Ist $\{N_\ell\}_\ell \subset C^\infty(N\mathcal{M})$ ein (globaler oder lokaler) orthonormaler Frame für $N\mathcal{M}$, so besitzt die zweite Fundamentalform die Darstellung

$$B(X,Y) = \sum_{\ell=1}^{\operatorname{codim}(f)} b^\ell(X,Y)\, N_\ell$$

mit den **skalaren zweiten Fundamentalformen** $b^\ell \in C^\infty(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ bezüglich des Einheitsnormalenvektorfeldes N_ℓ als Komponenten von B. ♦

Dass die zweite Fundamentalform in der Tat eine symmetrische Bilinearform ist, lässt sich in [*Lee, 1997*, Lemma 8.1] nachlesen. Zusammen mit Gleichung (1.1) ergibt die Definition der zweiten Fundamentalform die Zerlegung des Pullback-Zusammenhangs

$$\nabla^*_X Y \;=\; \nabla_X Y + B(X,Y) \qquad \text{für } X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,,$$

welche auch als **Gauß-Formel** bekannt ist.

Als Abbildung in die Menge der Schnitte des Normalenbündels ist die zweite Fundamentalform insbesondere ein Objekt der äußeren Geometrie. Interessanterweise lässt sich allerdings zusammen mit der *Weingarten Gleichung* (siehe [*Lee, 1997*, Lemma 8.3]) ein Zusammenhang zwischen der inneren und äußeren Geometrie zeigen. Die Relation, welche die zweite Fundamentalform mit den intrinsischen Krümmungen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ verknüpft, wird als *Gauß-Gleichung* bezeichnet, aus welcher sich im Fall von Flächen im $\mathbb{R}^3$ das bekannte *Theorema Egregium* folgern lässt (siehe auch Abschnitt 1.1.8).

1.1.5 Satz (Gauß-Gleichung)

Für eine Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in die riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N},\tilde g)$ mit Levi-Civita-Zusammenhang gilt die ***Gauß-Gleichung***

$$\widetilde{\mathrm{Riem}}(X,Y,Z,W) - \mathrm{Riem}(X,Y,Z,W) \;=\; \big\langle B(X,Z)\,,\,B(Y,W)\big\rangle_{g^*} - \big\langle B(X,W)\,,\,B(Y,Z)\big\rangle_{g^*}$$

für $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, wobei wir den riemannschen Krümmungstensor $\widetilde{\mathrm{Riem}}$ von $(\mathcal{N},\tilde g)$ auf $T\mathcal{M}$ eingeschränkt verstehen, d. h.

$$\widetilde{\mathrm{Riem}}(X,Y,Z,W)\big|_p \;:=\; \widetilde{\mathrm{Riem}}_{f(p)}\big(f_*X_p, f_*Y_p, f_*Z_p, f_*W_p\big) \qquad \textit{für } p \in \mathcal{M}\,,$$

was wegen der tensoriellen Eigenschaft wohldefiniert ist. Der riemannsche Krümmungstensor Riem *ist dagegen bezüglich der ersten Fundamentalform $g := f^*\tilde g$ zu verstehen und die zweite Fundamentalform B wie in Definition 1.1.4 bezüglich des Pullbacks ∇^* des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $\mathcal{N}$.*

Beweis: Der Beweis lässt sich in [*Lee, 1997*, Theorem 8.4] nachlesen. □

Wir geben nun als Beispiel die Berechnung der zweiten Fundamentalform für $\mathbb{R}^n$ als ambienten Raum mit euklidischer Metrik an.

1.1.6 Hilfssatz (Zweite Fundamentalform für $\mathbb{R}^n$ als ambienten Raum)

Wir betrachten eine Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ in den ambienten Raum $\mathcal{N}^n = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik g_{euc}. Seien (U,x) eine Karte auf $\mathcal{M}^m$, $y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ die kanonische globale Karte auf $\mathbb{R}^n$, $f^k = y^k \circ f$ die Komponenten von f, $F_k = \partial_{y^k}|_{f(\mathcal{M}^m)}$ der kanonische Frame auf $f^*T\mathbb{R}^n$ und $\{N_\ell\}_\ell$ ein lokaler orthonormaler Frame des Normalenbündels $N\mathcal{M}^m$ über U. Dann berechnet sich die zweite Fundamentalform zu

$$B(X,Y) \;=\; \sum_{\ell=1}^{n-m} b^\ell(X,Y)\,N_\ell \qquad \textit{mit}\quad b^\ell_{ij} \;:=\; b^\ell\big(\partial_{x^i},\partial_{x^j}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\,\big\langle F_k, N_\ell\big\rangle_{g^*}$$

auf U.

Beweis: Wir halten die Berechnung anfänglich so allgemein wie möglich. Seien $\{E_i\}_i \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $\{F_k\}_k \subset C^\infty(f^*T\mathcal{N}^n)$ beliebige lokale Frames, wobei $\mathcal{N}^n$ zunächst beliebig sein darf. E_i lässt sich dann auch schreiben als $E_i = \sum_{k=1}^n E_i^k F_k$ mit Komponentenfunktionen $E_i^k \in C^\infty(\mathcal{M}^m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} B(E_i, E_j) &= \nabla^\perp_{E_i} E_j \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \big\langle \nabla^*_{E_i} E_j \,,\, N_\ell \big\rangle_{g^*} N_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \left\langle \nabla^*_{E_i} \left(\sum_{k=1}^n E_j^k\, F_k \right), N_\ell \right\rangle_{g^*} N_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \left\langle \sum_{k=1}^n \left(E_j^k\, \nabla^*_{E_i} F_k + E_i(E_j^k)\, F_k \right), N_\ell \right\rangle_{g^*} N_\ell \,. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun $\mathcal{N}^n = \mathbb{R}^n$ mit globaler Karte $y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und ∂_{y^k} als Koordinatenvektorfelder sowie die Wahl von $F_k := \partial_{y^k}|_{f(\mathcal{M}^m)}$, so verschwindet der erste Term, denn

$$\nabla^*_{E_i(p)} F_k \;=\; \tilde\nabla_{f_* E_i(p)} \partial_{y^k} \;=\; \sum_{r=1}^n E_i^r(p) \left(\tilde\nabla_{\partial_{y^r}} \partial_{y^k}\right)\big|_{f(p)} \;=\; \sum_{r,s=1}^n E_i^r(p)\, \underbrace{\tilde\Gamma^s_{rk}\big(f(p)\big)}_{=0\,,\ \text{vgl. Satz A.3.2}}\, \partial_{y^s}|_{f(p)} \;=\; 0$$

für $p \in \mathcal{M}^m$. Wählen wir weiter $E_i = \partial_{x^i}$ als Koordinatenvektorfelder auf U, so sind die Komponentenfunktionen gegeben durch

$$E_j^k \;=\; \partial_{x^j}(y^k \circ f) \;=\; \frac{\partial f^k}{\partial x^j}\,,$$

sodass

$$E_i(E_j^k) \;=\; \partial_{x^i} E_j^k \;=\; \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i\, \partial x^j}\,.$$

Zusammen erhalten wir dann

$$B(E_i, E_j) \;=\; B\big(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}\big) \;=\; \sum_{\ell=1}^{n-m} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i\, \partial x^j} \big\langle F_k, N_\ell \big\rangle_{g^*} \right) N_\ell\,.$$

□

Mit der Einführung der zweiten Fundamentalform können wir nun die *mittlere Krümmung* als Spur dieser und als ein Objekt der äußeren Geometrie einführen.

1.1.7 Definition (Mittleres Krümmungsvektorfeld)

Sei $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ eine Immersion wie in Definition 1.1.4. Das **mittlere Krümmungsvektorfeld** $\vec{\boldsymbol{H}}$ ist definiert als

$$\vec H \;:=\; \frac{1}{m}\, \mathrm{tr}_g\, B\,,$$

sodass $\vec{H} \in C^\infty(N\mathcal{M})$. Lokal besitzt das mittlere Krümmungsvektorfeld dann die Form

$$\vec{H}(p) \,=\, \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(p)\, B(E_i, E_j)\big|_p \,=\, \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(p)\, \nabla^{\perp}_{E_i} E_j\big|_p\,,$$

wobei $\{E_i\}_i \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$ ein lokaler Frame um $p \in \mathcal{M}^m$ ist und $(g^{ij}(p))_{i,j} = (g_{ij}(p))^{-1}$ mit $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$. Im Fall von $\operatorname{codim}(f) = 1$, d. h. $n = m + 1$, und sofern ein (bis auf das Vorzeichen eindeutiges) Einheitsnormalenvektorfeld $N \in C^\infty(N\mathcal{M}^m)$ existiert, nennen wir $H := \langle \vec{H}, N\rangle_{g^*}$ die **(skalare) mittlere Krümmung**. In den übrigen Fällen definiert man diese wiederum als den Betrag des mittleren Krümmungsvektorfeldes $H := |\vec{H}|_{g^*}$. ♦

Für die skalaren zweiten Fundamentalformen b^ℓ bezüglich des Einheitsnormalenvektorfeldes N_ℓ als (lokale) symmetrische $(0, 2)$-Tensoren lassen sich die Indizes „anheben“ (siehe auch Kapitel A.1). Die so erhaltenen $(1, 1)$-Tensoren bezeichnet man auch als *Formoperatoren*. Diese beschreiben, wie stark sich $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ in welche Richtungen bezüglich des entsprechenden Einheitsnormalenvektorfeldes krümmt.

1.1.8 Formoperatoren und Hauptkrümmungen

Gegeben sei eine Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ wie in Definition 1.1.4 bzw. Definition 1.1.7. Lokal sei weiter ein orthonormaler Frame $\{N_\ell\}_\ell$ für $N\mathcal{M}^m$ gegeben und skalare zweite Fundamentalformen b^ℓ, sodass

$$B(X, Y) \,=\, \sum_{\ell=1}^{n-m} b^\ell(X, Y)\, N_\ell\,.$$

Durch „Heben“ eines Indizes der symmetrischen $(0, 2)$-Tensoren b^ℓ erhalten wir selbstadjungierte Endomorphismen $s^\ell \in C^\infty(T^1_1\mathcal{M}^m)$, welche

$$b^\ell(X, Y) \,=\, \big\langle X\,,\, s^\ell(Y)\big\rangle_g \qquad \text{für } X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^m)$$

erfüllen. Diese nennt man die **Formoperatoren** oder auch **Weingartenabbildungen**. Bezüglich eines lokalen Frames $\{E_i\}_i \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^m)$ besitzen die Formoperatoren die Form $s^\ell(E_j) = (s^\ell)^i_j\, E_i$ mit den Komponenten

$$(s^\ell)^i_j \in C^\infty(\mathcal{M}^m)\,, \qquad (s^\ell)^i_j(p) \,=\, \sum_{k=1}^{m} g^{ik}(p)\, b_{kj}(p)\,, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

wobei $(g^{ij}(p))_{i,j} = (g_{ij}(p))^{-1}$ mit $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$ und $b_{ij}(p) = b(E_i(p), E_j(p))$. Die Eigenwerte $\kappa^\ell_i \in C^\infty(\mathcal{M}^m)$ für $i = 1, \ldots, m$ des Formoperators s^ℓ werden auch als **Hauptkrümmungen bezüglich $\boldsymbol{N_\ell}$** bezeichnet. Als Eigenwerte sind diese wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des lokalen Frames $\{E_i\}_i$, und wegen der Symmetrie der skalaren zweiten Fundamentalformen auch reell.

Mit den Hauptkrümmungen lässt sich die mittlere Krümmung dann darstellen als

$$H \,=\, |\vec{H}|_{g^*} \,=\, \big\langle \vec{H}\,,\, \vec{H}\big\rangle^{1/2}_{g^*} \,=\, \frac{1}{m}\big\langle \operatorname{tr}_g B\,,\, \operatorname{tr}_g B\big\rangle^{1/2}_{g^*}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\Big\langle \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\, B\big(E_i,E_j\big)\,,\ \sum_{k,\ell=1}^{m} g^{k\ell}\, B\big(E_k,E_\ell\big)\Big\rangle_{g^*}^{1/2} \\
&= \frac{1}{m}\Big\langle \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \sum_{q=1}^{n-m} b^q(E_i,E_j)\, N_q\,,\ \sum_{k,\ell=1}^{m} g^{k\ell} \sum_{r=1}^{n-m} b^r(E_k,E_\ell)\, N_r\Big\rangle_{g^*}^{1/2} \\
&= \frac{1}{m}\Bigg[\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ij}\, g^{k\ell} \sum_{q,r=1}^{n-m} b^q_{ij}\, b^r_{k\ell}\, \underbrace{\big\langle N_q, N_r\big\rangle_{g^*}}_{=\,\delta_{qr}}\Bigg]^{1/2} \\
&= \frac{1}{m}\Bigg[\sum_{r=1}^{n-m}\bigg(\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\, b^r_{ij}\bigg)^2\Bigg]^{1/2} \\
&= \frac{1}{m}\Bigg[\sum_{r=1}^{n-m}\bigg(\sum_{i=1}^{m}(s^r)^i_i\bigg)^2\Bigg]^{1/2} = \frac{1}{m}\Bigg[\sum_{r=1}^{n-m}\big(\operatorname{tr} s^r\big)^2\Bigg]^{1/2} = \frac{1}{m}\Bigg[\sum_{r=1}^{n-m}\bigg(\sum_{i=1}^{m}\kappa^r_i\bigg)^2\Bigg]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Analog rechnet man im Fall $n = m+1$ nach, dass

$$H \;=\; \big\langle \vec{H}, N\big\rangle_{g^*} \;=\; \dots \;=\; \frac{1}{m}\,\operatorname{tr} s \;=\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\kappa_i$$

mit $N = N_1$, $s = s^1$ und $\kappa_i = \kappa^1_i$. Die mittlere Krümmung als $\frac{1}{m}$ mal der Spur der zweiten Fundamentalform lässt sich dann als Mittelwert der Eigenwerte des Formoperators, also der Hauptkrümmungen, auffassen.

Für den Spezialfall von (Hyper-)Flächen im $\mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik lässt sich aus der Gauß-Gleichung in Satz 1.1.5 ein Zusammenhang zwischen der Gauß-Krümmung und den Hauptkrümmungen der Fläche finden, welcher aufgrund seiner historischen Bedeutung auch als **Theorema Egregium** bezeichnet wird (vgl. mit [*Lee, 1997*, Theorem 8.6]). Mit dem Zusammenhang $S = 2K$ zwischen skalarer und Gauß-Krümmung und der Tatsache, dass $\widetilde{\mathrm{Riem}}$ im $\mathbb{R}^3$ identisch verschwindet, rechnet man lokal um jeden Punkt $p \in \mathcal{M}^2$

$$
\begin{aligned}
K \;&=\; \frac{1}{2}\,S \;=\; \frac{1}{2}\,\operatorname{tr}_g \mathrm{Ric} \;=\; \frac{1}{2}\,\operatorname{tr}_g\Big((X,Y)\mapsto \mathrm{Ric}(X,Y)\Big) \\
&=\; \frac{1}{2}\,\operatorname{tr}_g\Big((X,Y)\mapsto \operatorname{tr}_g\Big((V,W)\mapsto \mathrm{Riem}(X,V,W,Y)\Big)\Big) \\
&\overset{1.1.5}{=}\; \frac{1}{2}\,\operatorname{tr}_g\bigg((X,Y)\mapsto \operatorname{tr}_g\Big((V,W)\mapsto \big\langle B(X,Y)\,,\ B(V,W)\big\rangle_{g^*} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \big\langle B(X,W)\,,\ B(V,Y)\big\rangle_{g^*}\Big)\bigg) \\
&=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{2} g^{ij}\, g^{k\ell}\,\big(b_{ij}\, b_{k\ell} - b_{i\ell}\, b_{jk}\big) \\
&=\; \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{2} s^i_i\, s^k_k - s^k_i\, s^i_k \;=\; s^1_1\, s^2_2 - s^1_2\, s^2_1 \;=\; \det s \;=\; \kappa_1\kappa_2\,.
\end{aligned}
$$

Die Gauß-Krümmung als Objekt der inneren Geometrie lässt sich also auch durch die Hauptkrümmungen als Objekte der äußeren Geometrie ausdrücken. Die Gleichung $K = \det s$ motiviert Verallgemeinerungen der Definition der Gauß-Krümmung auf allgemeinere Situationen mittels äußerer Geometrie.

Neben der Möglichkeit einer Interpretation der Determinante der skalaren zweiten Fundamentalform als Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Hyperfläche lässt sich die Gauß-Gleichung auch für eine andere Darstellung des Betragsquadrates der zweiten Fundamentalform verwenden.

1.1.9 Betrag der zweiten Fundamentalform

Für eine Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ induziert die erste Fundamentalform g auf $T\mathcal{M}^m$ zusammen mit der induzierten Metrik g^* eingeschränkt auf $N\mathcal{M}^m$ eine Metrik $\hat{g}$ (siehe [*Bleecker, 1981*, Definition 0.1.5]) auf der Menge $T^*\mathcal{M}^m \otimes T^*\mathcal{M}^m \otimes N\mathcal{M}^m$ bezüglich der $N\mathcal{M}^m$-wertigen Bilinearformen über $T\mathcal{M}^m$. Mit dieser Metrik definieren wir den Betrag der zweiten Fundamentalform durch

$$|B|^2_{g,g^*} := \hat{g}(B,B) := \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ik}\, g^{j\ell} \left\langle B(E_i,E_j)\,,\, B(E_k,E_\ell)\right\rangle_{g^*} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ik}\, g^{j\ell} \left\langle B_{ij}, B_{k\ell}\right\rangle_{g^*}$$

mit einem lokalen Frame $\{E_i\}_i \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^m)$. Die Anwendung der Gauß-Gleichung zu Berechnung der skalaren Krümmung S liefert dann (vgl. auch mit der Rechnung in Abschnitt 1.1.8)

$$\begin{aligned}
S &= \operatorname{tr}_g \Big((X,Y) \mapsto \operatorname{tr}_g \big((V,W) \mapsto \operatorname{Riem}(X,V,W,Y) \big) \Big) \\
&\overset{1.1.5}{=} \operatorname{tr}_g \Big((X,Y) \mapsto \operatorname{tr}_g \big((V,W) \mapsto \left\langle B(X,Y)\,,\, B(V,W)\right\rangle_{g^*} \\
&\qquad\qquad\qquad - \left\langle B(X,W)\,,\, B(V,Y)\right\rangle_{g^*} \big) \Big) \\
&= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ij}\, g^{k\ell} \left(\left\langle B_{ij}, B_{k\ell}\right\rangle_{g^*} - \left\langle B_{i\ell}, B_{jk}\right\rangle_{g^*} \right) \\
&= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ij}\, g^{k\ell} \left\langle B_{ij}, B_{k\ell}\right\rangle_{g^*} - |B|^2_{g,g^*} \\
&= \left\langle \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\, B_{ij}\,,\, \sum_{k,\ell=1}^{m} g^{k\ell} B_{k\ell} \right\rangle_{g^*} - |B|^2_{g,g^*} \\
&= \left\langle m \operatorname{tr}_g B\,,\, m \operatorname{tr}_g B\right\rangle_{g^*} - |B|^2_{g,g^*} \\
&= m^2\, |\vec{H}|^2_{g^*} - |B|^2_{g,g^*}\,,
\end{aligned}$$

sodass also

$$|B|^2_{g,g^*} = m^2\, |\vec{H}|^2_{g^*} - S$$

gilt. Für 2-dimensionale Hyperflächen gilt dann insbesondere nach Abschnitt 1.1.8

$$|B|^2_{g,g^*} = 4H^2 - 2K = \big(\kappa_1 + \kappa_2\big)^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2\,.$$

Allgemein gilt für m-dimensionale Hyperflächen auch

$$|B|^2_{g,g^*} = \sum_{i=1}^{m} \kappa_i^2$$

nach der Definition des Betrags als Frobenius-Norm des Formoperators, da

$$|B|^2_{g,g^*} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ik}\, g^{j\ell} \left\langle B_{ij}, B_{k\ell}\right\rangle_{g^*} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{ik}\, g^{j\ell}\, b_{ij}\, b_{k\ell} = \sum_{j,k=1}^{m} s^k_j\, s^j_k = \operatorname{tr}\left(s \circ s^T\right).$$

■

1.2. Reguläre Kurven

Als Beispiel einer speziellen Situation von Immersionen schauen wir uns nun immersierte eindimensionale Mannigfaltigkeiten, also Kurven, an. Für diese werden wir eine Interpretation der mittleren Krümmung als Maß für die Abweichung der Kurve davon, eine *Geodäte* zu sein, finden.

1.2.1 Definition (Reguläre Kurven)
Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sodass $\mathcal{I}$ als eindimensionale Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) aufgefasst werden kann. Eine **Kurve** ist eine glatte Abbildung $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}$ in den ambienten Raum $\mathcal{N}$. Die Kurve heißt **regulär**, falls γ eine Immersion ist. ♦

Da ein Intervall $\mathcal{I}$ sich als eindimensionale Mannigfaltigkeit immer mit einer globalen Karte überdecken lässt, ist das Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$ bezüglich dieser Karte ein globaler Schnitt und sogar ein globaler Frame des Tangentialbündels $T\mathcal{I}$. Das **Geschwindigkeitsvektorfeld** einer Kurve γ wird mit $\dot\gamma$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\dot\gamma\colon \mathcal{I} \to \gamma^*T\mathcal{N}\,, \qquad \dot\gamma(t) := \gamma_*\partial_t\big|_t = \mathrm{d}\gamma(\partial_t)(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{N}\,.$$

Im Allgemeinen nennt man Schnitte des Pullback-Bündels $\gamma^*T\mathcal{N}$ auch **Vektorfelder entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$**.

Sei nun $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}$ eine reguläre Kurve, wobei $\mathcal{N}$ mit einer riemannschen Metrik $\tilde g$ und dem entsprechenden Levi-Civita-Zusammenhang $\tilde\nabla$ versehen ist. Für den Pullback-Zusammenhang ∇^* auf $\gamma^*T\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Derivation über $\gamma^*T\mathcal{N}$, welche durch

$$\mathrm{D}_t\colon C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}) \to C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N})\,, \qquad \mathrm{D}_t := \nabla^*_{\partial_t}\,,$$

definiert ist, als **Zusammenhang entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$**. Wir bezeichnen auch wieder mit

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t^\top &:= {}^\top \circ \mathrm{D}_t :\ C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{I})\,,\\ \mathrm{D}_t^\perp &:= {}^\perp \circ \mathrm{D}_t :\ C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}) \to C^\infty(N\mathcal{I}) \end{aligned}$$

die Projektionen von D_t auf das Tangentialbündel $T\mathcal{I}$ bzw. das Normalenbündel $N\mathcal{I}$.

1.2.2 Definition (Geodäte)
Eine reguläre Kurve $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}$ heißt **Geodäte**, falls die **Geodätengleichung**

$$\mathrm{D}_t\dot\gamma \equiv 0 \tag{1.2}$$

erfüllt ist ♦

Lokal lässt sich Gleichung (1.2) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Komponenten von γ umschreiben. Seien $t \in \mathcal{I}$ und (V, y) eine Karte für $\mathcal{N}^n$ um $\gamma(t)$ mit lokalem Frame $\{\partial_{y^i}\}_i$ für $T\mathcal{N}^n$. Es bezeichne $\gamma^k = y^k \circ \gamma$ die Komponenten von γ, sodass $\dot\gamma = \sum_{i=1}^n \dot\gamma^i \partial_{y^i}$, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\mathrm{D}_t\dot\gamma\big)(t) = \big(\nabla^*_{\partial_t}\dot\gamma\big)(t) = \left(\nabla^*_{\partial_t}\left(\sum_{i=1}^n \dot\gamma^i\,\partial_{y^i}\right)\right)(t) = \sum_{i=1}^n \Big(\ddot\gamma^i(t)\,\partial_{y^i}\big|_{\gamma(t)} + \dot\gamma^i(t)\,\tilde\nabla_{\dot\gamma(t)}\partial_{y^i}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\ddot\gamma^i(t)\,\partial_{y^i}\big|_{\gamma(t)} + \dot\gamma^i(t)\,\tilde\nabla_{\dot\gamma(t)}\partial_{y^i}\Big) = \sum_{i=1}^n \left(\ddot\gamma^i(t)\,\partial_{y^i}\big|_{\gamma(t)} + \sum_{j=1}^n \dot\gamma^i(t)\,\dot\gamma^j(t)\,\underbrace{\tilde\nabla_{\partial_{y^j}}\partial_{y^i}\big|_{\gamma(t)}}_{=\sum_{k=1}^n \tilde\Gamma_{ij}^k\,\partial_{y^k}}\right) \end{aligned}$$

mit den Christoffel-Symbolen $\tilde\Gamma_{ij}^k$ bezüglich $\tilde\nabla$. Damit gilt dann für $i = 1, \ldots, n$ also

$$\ddot\gamma^i(t) + \sum_{k,\ell=1}^n \dot\gamma^k(t)\,\dot\gamma^\ell(t)\,\tilde\Gamma_{k\ell}^i\big(\gamma(t)\big) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathcal{I}\,.$$

Eine reguläre Kurve nennen wir **nach der Bogenlänge parametrisiert**, falls ∂_t bezüglich der ersten Fundamentalform normiert ist, d. h. $g(\partial_t, \partial_t) \equiv 1$. Der Parameter t misst dann die Länge der Kurve γ (siehe [*Lee, 1997*, Exercise 6.2]). Weiter lässt sich zeigen, dass es für jede reguläre Kurve $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}$ eine Umparametrisierung $\tau\colon \tilde{\mathcal{I}} \to \mathcal{I}$ gibt, sodass $\tilde\gamma := \gamma \circ \tau\colon \tilde{\mathcal{I}} \to \mathcal{N}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve ist (siehe [*Lee, 1997*, Exercise 6.2]). Für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven lässt sich die *geodätische Krümmung* als Maß der Abweichung von der Geodätengleichung (1.2) einführen.

1.2.3 Definition (Geodätische Krümmung)
Sei $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve. Für den Fall, dass $n = 2$ ist und dass ein Einheitsnormalenvektorfeld $N \in C^\infty(N\mathcal{I})$ entlang γ gegeben ist, definieren wir die **geodätische Krümmung** als die Abbildung

$$\kappa\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}\,, \qquad \kappa := \big\langle\, \mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\, N \big\rangle_{g^*}\,.$$

In den übrigen Fällen definieren wir diese als

$$\kappa\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}\,, \qquad \kappa := \big|\,\mathrm{D}_t\dot\gamma\big|_{g^*} = \sqrt{g^*\big(\,\mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\,\mathrm{D}_t\dot\gamma\big)}\,.$$

Die geodätische Krümmung beliebiger regulärer Kurven ist definiert als die geodätische Krümmung einer dazugehörigen nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve, zurückgezogen auf das ursprüngliche Intervall. ♦

Wie die geodätische Krümmung in der Praxis für beliebig parametrisierte reguläre Kurven auszurechnen ist, gibt der nächste Satz an.

1.2.4 Satz (geodätische Krümmung und mittlere Krümmung von Kurven)
Sei $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}^n$ eine reguläre Kurve. Dann stimmt die geodätische Krümmung κ mit der skalaren

mittleren Krümmung H von γ als Immersion überein. Im Fall $n = 2$ mit Einheitsnormalenvektorfeld N gilt dann insbesondere

$$\kappa \,=\, H \,=\, \frac{\big\langle\, \mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\, N \big\rangle_{g^*}}{\langle \dot\gamma\,,\,\dot\gamma\rangle_g}\,.$$

In den übrigen Fällen gilt dagegen

$$\kappa \,=\, H \,=\, \frac{\big|\, \mathrm{D}_t^{\perp}\dot\gamma \big|_{g^*}}{\langle \dot\gamma\,,\,\dot\gamma\rangle_g}\,.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die geodätische mit der mittleren Krümmung übereinstimmt. Dazu nehmen wir zunächst an, dass $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{N}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Für diese gilt

$$\mathrm{D}_t^{\top}\dot\gamma \,=\, \big(\mathrm{D}_t\dot\gamma\big)^{\top} \,=\, g^*\big(\mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\,\dot\gamma\big)\,\dot\gamma \,=\, \frac{1}{2}\frac{\partial\, g(\partial_t,\partial_t)}{\partial t}\,\dot\gamma \,\equiv\, 0\,,$$

da $g(\partial_t,\partial_t) \equiv 1$ nach Annahme. Weiter haben wir mit der Definition des mittleren Krümmungsvektorfeldes $\vec{H}$ für $m = 1$

$$\vec{H} \,=\, \frac{1}{m}\,\mathrm{tr}_g\, B \,=\, \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{g^{ij}}_{\equiv 1}\;\nabla^{\perp}_{\partial_t}\dot\gamma \,=\, \mathrm{D}_t^{\perp}\dot\gamma\,.$$

Somit erhalten wir also

$$\mathrm{D}_t\dot\gamma \,=\, \underbrace{\mathrm{D}_t^{\top}\dot\gamma}_{\equiv 0} + \mathrm{D}_t^{\perp}\dot\gamma \,=\, \vec{H}\,. \tag{1.3}$$

Setzen wir dies in die Definition der geodätischen Krümmung ein, so ergibt sich im Fall $n = 2$ mit Einheitsnormalenvektorfeld N

$$\kappa \,=\, \big\langle\, \mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\, N \big\rangle_{g^*} \overset{(1.3)}{=} \big\langle \vec{H}\,,\, N \big\rangle_{g^*} \,=\, H$$

nach Definition der skalaren mittleren Krümmung. Für die sonstigen Fälle haben wir

$$\kappa \,=\, \big|\, \mathrm{D}_t\dot\gamma \big|_{g^*} \overset{(1.3)}{=} |\vec{H}|_{g^*} \,=\, H\,,$$

was $\kappa = H$ zeigt.

Das Resultat gilt auch für beliebige Parametrisierungen von γ, da die mittlere Krümmung koordinatenunabhängig definiert ist. Somit berechnet sich die geodätische Krümmung beliebig parametrisierter regulärer Kurven zu

$$\kappa \,=\, H \,=\, \big\langle \vec{H}\,,\, N \big\rangle_{g^*} \,=\, \frac{\big\langle\, \mathrm{D}_t^{\perp}\dot\gamma\,,\, N \big\rangle_{g^*}}{\langle \dot\gamma\,,\,\dot\gamma\rangle_g} \,=\, \frac{\big\langle\, \mathrm{D}_t\dot\gamma\,,\, N \big\rangle_{g^*}}{\langle \dot\gamma\,,\,\dot\gamma\rangle_g}$$

für den Fall $n = 2$ mit Einheitsnormalenvektorfeld N und

$$\kappa \,=\, H \,=\, \big|\vec{H}\big|_{g^*} \,=\, \frac{\big|\, \mathrm{D}_t^{\perp}\dot\gamma \big|_{g^*}}{\langle \dot\gamma\,,\,\dot\gamma\rangle_g}$$

für den allgemeinen Fall. $\square$

1.3. Variationen immersierter Mannigfaltigkeiten

Eine weitere interessante Situation stellen *Variationen* einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dar. Unter dieser verstehen wir zeitabhängige Immersionen, welche zu einem Zeitpunkt mit f übereinstimmen. Wir werden hier die Begriffe aus Kapitel 1.1 für Variationen anpassen.

Wir führen zunächst noch ein paar Notationen ein. Sei eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gegeben zusammen mit einem Intervall $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten dann die Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{I} \times \mathcal{M}$ („Zeit + Raum"). Für festgehaltene Zeiten $t \in \mathcal{I}$ betten die Abbildungen $\iota\colon \mathcal{M} \to \mathcal{I} \times \mathcal{M}$ mit $\iota_t(p) := (t, p)$ $\mathcal{M}$ in $\mathcal{I} \times \mathcal{M}$ ein. Das Tangentialbündel von $\mathcal{I} \times \mathcal{M}$ lässt sich als Whitney-Summe $T(\mathcal{I} \times \mathcal{M}) \cong T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}$ der einzelnen Tangentialbündel $\mathcal{I}$ und $\mathcal{M}$ auffassen (siehe auch [*Isham, 1999*, Theorem 2.3]). Mit $\partial_t \in \mathfrak{X}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{I} \times \mathcal{M})$ wollen wir stets das Tangentialvektorfeld bezeichnen, welches in Zeitrichtung zeigt, also das globale Koordinatenvektorfeld auf $\mathcal{I}$ eingebettet nach $\mathcal{I} \times \mathcal{M}$.

1.3.1 Definition (Variation)
Sei $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Immersion. Als **Variation von f** bezeichnen wir für ein $\delta > 0$ eine glatte Abbildung $F\colon \mathcal{I} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit $\mathcal{I} = (-\delta, \delta)$, sodass $f_t := F \circ \iota_t = F(t, \cdot\,)$ für alle Zeiten $t \in \mathcal{I}$ eine Immersion von $\mathcal{M}$ ist und $f_0 = f$ gilt (siehe Bild 1.1). Wir nennen das Vektorfeld $V \in C^\infty(F^*T\mathcal{N})$

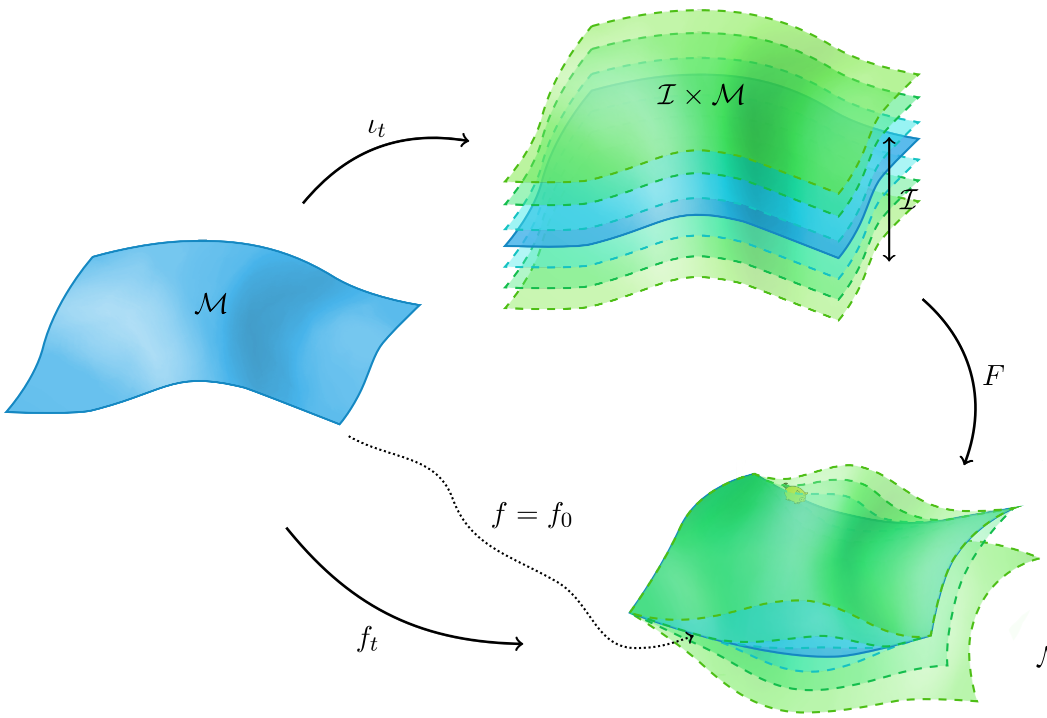


Bild 1.1: Veranschaulichung der Definition einer Variation von $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

mit $V(t, p) := F_* \partial_t|_{(t,p)}$ auch das **Variationsvektorfeld** der Variation F. ♦

Wir werden die Definitionen der Begriffe des Tangential- und Normalenbündels an die neue Situation anpassen müssen, um eine zeitabhängige mittlere Krümmung einführen zu können, da eine Variation als Abbildung $F\colon \mathcal{I}\times\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ im Allgemeinen keine Immersion mehr sein wird.

Als **variationelle Tangentialräume** bezeichnen wir die zeitabhängigen Tangentialräume

$$\mathcal{T}_{(t,p)}\mathcal{M} := (f_t)_*(T_p\mathcal{M}) \subset F_*\big(T_{(t,p)}(\mathcal{I}\times\mathcal{M})\big) \qquad \text{für } (t,p)\in\mathcal{I}\times\mathcal{M}\,.$$

Das **variationelle Tangentialbündel** ist dann wiederum die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{T}\mathcal{M} := \coprod_{(t,p)\in\mathcal{I}\times\mathcal{M}} \mathcal{T}_{(t,p)}\mathcal{M}\,,$$

versehen mit der Struktur eines Vektorbündels.

Sei nun der ambiente Raum $\mathcal{N}$ mit einer riemannschen Metrik $\tilde{g}$ und mit dem entsprechenden Levi-Civita-Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ versehen. Mit $\mathcal{M}_t$ wollen wir dann die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zusammen mit der von f_t induzierten riemannschen Struktur bezeichnen, sodass $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0$. Die Pullback-Metrik auf $T\mathcal{M}_t$ bzw. die induzierte Metrik auf $f_t^*T\mathcal{N}$ wollen wir mit g_t bzw. mit g_t^* schreiben.

Ebenso induziert die Variation F eine Pullback-Struktur über $\mathcal{I}\times\mathcal{M}$. Die von F induzierte Bündelmetrik auf $F^*T\mathcal{N}$ wollen wir mit h bezeichnen und den Pullback-Zusammenhang mit ${}^F\nabla$. Die Bündelmetrik h erlaubt es wieder, Normalenräume einzuführen. Als **variationelles Normalenbündel** bezeichnen wir dann die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{N}\mathcal{M} := \coprod_{(t,p)\in\mathcal{I}\times\mathcal{M}} \mathcal{N}_{(t,p)}\mathcal{M} \qquad \text{mit} \quad \mathcal{N}_{(t,p)}\mathcal{M} := (\mathcal{T}_{(t,p)}\mathcal{M})^\perp$$

aller **variationellen Normalenräume** $\mathcal{N}_{(t,p)}\mathcal{M}$, wobei hier $^\perp$ das orthogonale Komplement bezüglich der Metrik h bezeichnet. Dies liefert uns wieder die Zerlegung $F^*T\mathcal{N}=\mathcal{T}\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}\mathcal{M}$ und unter

$${}^\top\colon F^*T\mathcal{N}\to\mathcal{T}\mathcal{M}\,, \qquad {}^\perp\colon F^*T\mathcal{N}\to\mathcal{N}\mathcal{M}$$

verstehen wir ebenso die Projektionen auf das variationelle Tangential- bzw. Normalenbündel, sodass ein $\xi\in(F^*T\mathcal{N})_{(t,p)}$ für $(t,p)\in\mathcal{I}\times\mathcal{M}$ die eindeutige Darstellung $\xi=\xi^\top+\xi^\perp$ mit $\xi^\top\in\mathcal{T}_{(t,p)}\mathcal{M}$ und $\xi^\perp\in\mathcal{N}_{(t,p)}\mathcal{M}$ besitzt. Die Komponenten $V^\perp$ und $V^\top$ des Variationsvektorfeldes V nennt man dann auch **normale Variation** und **tangentiale** bzw. **innere Variation**. Weiter bezeichnen wir die Komponenten des Pullback-Zusammenhangs ${}^F\nabla$ bezüglich $\mathcal{T}\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}\mathcal{M}$ mit

$$\begin{aligned} {}^F\nabla^\top &:= {}^\top\circ{}^F\nabla^*\colon \mathfrak{X}(\mathcal{I}\times\mathcal{M})\times C^\infty(F^*T\mathcal{N})\to C^\infty(\mathcal{T}\mathcal{M})\,,\\ {}^F\nabla^\perp &:= {}^\perp\circ{}^F\nabla^*\colon \mathfrak{X}(\mathcal{I}\times\mathcal{M})\times C^\infty(F^*T\mathcal{N})\to C^\infty(\mathcal{N}\mathcal{M})\,. \end{aligned}$$

Analog führt man nun wieder das mittlere Krümmungsvektorfeld $\vec{H}$ über $\mathcal{I}\times\mathcal{M}$ ein. Im Unterschied zu Definition 1.1.7 darf die Spur hier allerdings nicht mehr über $T(\mathcal{I}\times\mathcal{M})$ gebildet werden, sondern lediglich über $\mathcal{T}\mathcal{M}$. Sei $(t,p)\in\mathcal{T}\times\mathcal{M}^m$ und $\{E_i\}_i\subset C^\infty(\mathcal{T}\mathcal{M}^m)$ ein lokaler Frame um (t,p). Dann ist das mittlere Krümmungsvektorfeld $\vec{H}$ der Variation F definiert durch

$$\vec{H}(t,p) := \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^m h^{ij}(t,p)\,{}^F\nabla^\perp_{E_i}E_j\big|_{(t,p)}\,, \qquad \text{sodass } \vec{H}\in C^\infty(\mathcal{N}\mathcal{M}^m)\,,$$

wobei $(h^{ij}(t,p))_{i,j} = (h_{ij}(t,p))^{-1}$ mit $h_{ij}(t,p) = h(E_i(t,p), E_j(t,p))$. Nach Definition des Pullback-Bündels und des Pullback-Zusammenhangs ergibt sich insbesondere auch, dass $\vec{H}(t,\,\cdot\,)$ mit dem mittleren Krümmungsvektorfeld $\vec{H}_t$ der Immersion f_t auf $\mathcal{M}_t$ übereinstimmt im Sinne von $\vec{H}_t = \vec{H} \circ \iota_t$ als Schnitte von $f_t^* T\mathcal{N}$.

2. Das Willmore-, Flächen- und Helfrich-Funktional

Mit den in Kapitel 1 gelegten Grundlagen wollen wir nun die für diese Arbeit bedeutenden geometrischen Krümmungsfunktionale bzw. elastischen Energien, also das *Willmore-*, *Flächen-* und letztendlich auch das *Helfrich-Funktional*, einführen. Weiter geben wir deren ersten Variationen sowie die Euler-Lagrange-Gleichungen an. Wir wollen die Definitionen hier sehr allgemein halten und nicht nur für Flächen im $\mathbb{R}^3$ angeben, da zum einen in der Arbeit allgemeinere Situationen auftreten werden, wie beispielsweise in Kapitel 3.3, und zum anderen auch in der Literatur zum Willmore-Funktional wichtige Resultate für allgemeinere Situationen gefunden wurden (siehe z. B. [Schätzle, 2010] oder [Lawson, 1970]).

Kapitel 2.1 beginnt mit der Definition des Willmore-Funktionals. Dieses besitzt eine spezielle Symmetrie, die *konforme Invarianz*, welche wir dort auch kurz erklären. Kapitel 2.2 widmet sich dann der ersten Variation des Willmore-Funktionals, mit welcher wir die *Willmore-Gleichung* als Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktionals im Spezialfall von Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung berechnen werden. In Kapitel 2.3 werden dann letztendlich das Flächenfunktional und mit diesem dann auch das Helfrich-Funktional eingeführt. Für diese fassen wir ebenso die ersten Variationen und Euler-Lagrange-Gleichungen zusammen.

2.1. Das Willmore-Funktional

Wir beginnen zunächst mit der Definition des *Willmore-Funktionals*. Neben der bereits in der Einleitung erwähnten Form als Integral des Quadrates der mittleren Krümmung gibt es noch alternative Varianten, welche unter anderem die besondere Eigenschaft der *konformen Invarianz* besitzen (siehe z. B. [Weiner, 1978], [Chen, 1974] oder [*Willmore, 1993*, Chapter 7]). In einigen Situationen sind beide Varianten äquivalent, sodass das einfache Willmore-Funktional dort ebenso konform invariant ist.

Wir versuchen die Definitionen hier relativ allgemein zu halten. Dazu geben wir uns eine kompakte und orientierbare Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) $\mathcal{M}$ vor, welche durch $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in die riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, \tilde{g})$ immersiert ist. Wir behalten die in Kapitel 1 etablierte Notation bei, sodass g die erste Fundamentalform auf $\mathcal{M}$ beschreibt und g^* die auf dem Pullback-Bündel $f^*T\mathcal{N}$ durch $\tilde{g}$ induzierte Metrik. Mit $\mathrm{d}\mu_g$ bezeichnen wir dann die riemannsche Volumenform auf $\mathcal{M}$ (siehe auch Kapitel A.1).

2.1.1 Definition (Willmore-Funktional)
Wir definieren das **(*normale*) Willmore-Funktional $\mathcal{W}$** einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ als Quadrat der L^2-Norm der mittleren Krümmung auf $\mathcal{M}$ durch

$$\mathcal{W}(f) := \int_{\mathcal{M}} |\vec{H}|^2_{g^*} \,\mathrm{d}\mu_g \,.$$

Spezieller definieren wir im Fall von Flächen, d. h. zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, sodass $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$, noch das ***konforme*** **Willmore-Funktional $\boldsymbol{\mathcal{W}_c}$** durch

$$\mathcal{W}_c(f) := \int_{\mathcal{M}} \left(|\vec{H}|^2_{g^*} - K + \tilde{K}\right) \, \mathrm{d}\mu_g \,,$$

wobei $\tilde{K}(p)$ die Schnittkrümmung von $\mathcal{N}$ bezüglich der Ebene $f_*(T_p\mathcal{M})$ ist. ♦

Die Bezeichnung für $\mathcal{W}_c$ ist dadurch gerechtfertigt, dass dieses Funktional invariant unter *konformen Transformationen* ist. Unter einer **konformen Transformation** verstehen wir dabei einen Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ der riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, \tilde{g})$, sodass $\Phi^*\tilde{g} = e^{2\lambda}\tilde{g}$ mit einer Funktion $\lambda \in C^\infty(\mathcal{N})$ erfüllt ist. Das heißt, konforme Transformationen „strecken“ und „stauchen“ den Raum lokal isotrop, sodass Winkel erhalten bleiben. Mögliche allgemeinere Definitionen von konformen Willmore-Funktionalen lassen sich durch die Resultate aus [Chen, 1974] einführen.

2.1.2 Satz (Konforme Invarianz von $\boldsymbol{\mathcal{W}_c}$)
Das konforme Willmore-Funktional $\mathcal{W}_c$ ist konform invariant, d. h.

$$\mathcal{W}_c(\Phi \circ f) = \mathcal{W}_c(f)$$

für eine konforme Transformation $\Phi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

Beweis: Das Resultat war im Fall $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$ bereits [Thomson, 1923] und [*Blaschke, 1929*] bekannt und wurde auch von [White, 1973] rigoros bewiesen (siehe [*Willmore, 1993*, Section 7.3]). Die konformen Transformationen setzen sich hier aus Skalierungen, Drehungen und Inversionen an Sphären zusammen.

Das allgemeine Resultat für eine beliebige riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, \tilde{g})$ als ambienten Raum lässt sich in [Chen, 1974] nachlesen. □

Im Fall von $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik verschwinden alle Schnittkrümmungen, sodass $\tilde{K} \equiv 0$ ist und

$$\mathcal{W}_c(f) = \int_{\mathcal{M}} \left(|\vec{H}|^2_{g^*} - K\right) \, \mathrm{d}\mu_g$$

gilt. Nach dem Satz von Gauß-Bonnet (siehe z. B. [*Chavel, 2006*, Theorem V.2.7]) ist

$$-\int_{\mathcal{M}} K \, \mathrm{d}\mu_g = \int_{\partial\mathcal{M}} \kappa \, \mathrm{d}\mu_{\partial g} + 4\pi\big(\mathfrak{g}(f) - 1\big)\,, \tag{2.1}$$

wobei κ die geodätische Krümmung des Randes ist, $\mathrm{d}\mu_{\partial g}$ die durch $\mathrm{d}\mu_g$ induzierte riemannsche Volumenform des Randes von $\mathcal{M}$ und $\mathfrak{g}(\mathcal{M})$ das Geschlecht von $\mathcal{M}$. Somit unterscheidet sich $\mathcal{W}(f)$ von $\mathcal{W}_c(f)$ durch einen Randterm und eine topologische Invariante. Für unberandete Flächen sind somit Variationsprobleme für $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_c$ äquivalent. Für solche Flächen lässt sich zeigen, dass $\mathcal{W}(f) \geq 4\pi$ ist (siehe [*Willmore, 1993*, Theorem 7.2.2]), mit Gleichheit, falls $\mathcal{M}$ als Sphäre eingebettet wird. In dieser Arbeit interessieren wir uns dagegen für Mannigfaltigkeiten mit Rand, im Speziellen für Rotationsflächen (siehe Kapitel 3). Für diese sind Variationsprobleme von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_c$ dagegen nur unter bestimmten Randbedingungen äquivalent, für welche das Randintegral in Gleichung (2.1) in den Randwertklassen konstant ist.

2.2. Erste Variation des Willmore-Funktionals

In Variationsproblemen zum Willmore-Funktional interessiert man sich für dessen *kritische Punkte*. Dies sind Immersionen, für die die erste Variation verschwindet. Beispielsweise sind Minimierer des Willmore-Funktionals in hinreichend großen Klassen von immersierten Mannigfaltigkeiten kritisch. Kritische Punkte erfüllen dann die Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktionals, welche wir als *Willmore-Gleichung* bezeichnen wollen. Wir orientieren uns in diesem Kapitel an [Weiner, 1978].

Zunächst geben wir die erste Variation des Willmore-Funktionals in der allgemeinen Situation an, in welcher die kompakte und orientierbare Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) $\mathcal{M}$ durch $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in die riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, \tilde{g})$ immersiert ist, wie in Kapitel 2.1. Die Notation ist hier wieder dieselbe wie dort.

2.2.1 Hilfssatz (Erste Variation des Willmore-Funktionals)
Sei F als Variation von $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ gegeben mit Immersionen $f_t = F(t, \cdot)\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$, sodass $f_0 = f$. Die erste Variation des Willmore-Funktionals $\mathcal{W}$ berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_t)\Big|_{t=0} = &\int_{\mathcal{M}_t^m} \left\langle \frac{2}{m}\Big(\Delta_{g_t}^{\perp}\vec{H}_t + \bar{R}_t(\vec{H}_t) + \bar{A}_t(\vec{H}_t)\Big) - m\,|\vec{H}_t|^2_{g_t^*}\,\vec{H}_t\,,\,V_t^{\perp}\right\rangle_{g_t^*} \mathrm{d}\mu_{g_t}\Big|_{t=0} \\ &+ \int_{\partial\mathcal{M}_t^m} \Big(\big\langle \nabla_\eta^{\perp} V_t^{\perp}, \vec{H}_t\big\rangle_{g_t^*} - \big\langle V_t^{\perp}, \nabla_\eta^{\perp}\vec{H}_t\big\rangle_{g_t^*} + |\vec{H}_t|^2_{g_t^*}\,\big\langle V_t^{\top}, \eta\big\rangle_{g_t^*}\Big)\,\mathrm{d}\mu_{\partial g_t}\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dabei ist η das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{M}_t^m$, sodass $\eta_p \in T_p\mathcal{M}_t^m$ für alle $p \in \partial\mathcal{M}_t^m$, $\Delta_{g_t}^{\perp}$ der Laplace-Operator auf dem Normalenbündel von $\mathcal{M}_t^m$, V das Variationsvektorfeld der Variation F mit normaler und tangentialer Komponente $V^{\perp}$ und $V^{\top}$ sowie

$$\begin{aligned} \bar{R}_t(\vec{H}_t) &:= \operatorname{tr}_{g_t}\Big((X,Y) \mapsto R_{\tilde{\nabla}}\big(\vec{H}_t\,,\,X\big)(Y)\Big)^{\perp}, \\ \bar{A}_t(\vec{H}_t) &:= \operatorname{tr}_{g_t}\Big((X,Y) \mapsto -B_t\big(X, \nabla_Y^{\top}\vec{H}_t\big)\Big). \end{aligned}$$

Beweis: Die Berechnung der ersten Variation findet man in [Weiner, 1978, Paragraph 2] oder [Persson, 2003, Chapter 4.3]. □

2.2.2 Definition (Willmore-Fläche)
Als **Willmore-Immersion** bezeichnen wir eine Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, für welche das Willmore-Funktional kritisch ist, d. h., es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_t)\Big|_{t=0} = 0$$

für eine vorgegebene Menge von Variationen von f. Im Fall von Flächen, d. h. $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$, nennen wir die Immersion auch **Willmore-Fläche**.

Willmore-Immersionen, welche kritisch bezüglich einer hinreichend großen Menge von Variationen unter gegebenen Randbedingungen sind, erfüllen die Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktionals, welche als *Willmore-Gleichung* bezeichnet wird. Wir wollen diese nun im Fall von Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung für *Dirichlet-Randbedingungen* berechnen. Dabei sagen wir, dass eine Variation F mit Variationsvektorfeld V eine **Dirichlet-Randbedingung** erfüllt, falls

$$V_{t=0} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad \nabla^{\perp}_{\eta} V^{\perp}_{t=0} \equiv 0 \tag{2.2}$$

auf $\partial\mathcal{M}$ erfüllt ist. Dabei ist η wieder das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{M}$.

2.2.3 Satz (Dirichlet-Problem für Willmore-Hyperflächen in ambienten Räumen konstanter Schnittkrümmung)
Sei $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^{m+1}$ eine Willmore-Immersion, welche kritisch bezüglich der Variationen ist, welche die Dirichlet-Randbedingungen (2.2) erfüllen. An den ambienten Raum $\mathcal{N}^{m+1}$ mit riemannscher Metrik $\tilde{g}$ fordern wir weiter, dass dieser für $m = 1$ konstante skalare Krümmung und damit insbesondere auch konstante Gauß-Krümmung besitzt. Im Fall $m \geq 2$ habe $\mathcal{N}^{m+1}$ punktweise konstante Schnittkrümmungen, das heißt, für alle $q \in \mathcal{N}^{m+1}$ soll $\tilde{K}(\xi_q, \nu_q)$ den gleichen Wert für alle linear unabhängigen $\xi_q, \nu_q \in T_q\mathcal{N}^{m+1}$ besitzen. Dann erfüllt f die ***Willmore-Gleichung***

$$\Delta_g H + \frac{m^2}{2} H^3 - SH + \frac{m}{m+1} \tilde{S}\, H \;=\; 0 \qquad \text{auf } \mathcal{M}^m\,. \tag{2.3}$$

Dabei sind g die erste Fundamentalform von f, H die mittlere Krümmung auf $\mathcal{M}^m$, S die skalare Krümmung auf $\mathcal{M}^m$ und $\tilde{S}$ die konstante (siehe Schritt 1 im Beweis) skalare Krümmung auf $\mathcal{N}^{m+1}$. Δ_g ist der Laplace-Beltrami-Operator (siehe im Anhang in Kapitel A.5). Das Finden von Willmore-Immersionen (bzw. Willmore-Flächen) zu vorgegebenen Dirichlet-Randdaten bezeichnet man auch als ***Dirichlet-Problem für Willmore-Immersionen*** *(bzw.* ***-Flächen****).*

Beweis: Wir müssen die erste Variation aus Hilfssatz 2.2.1 auswerten. Aufgrund der vorgegebenen Randwerte des Variationsvektorfeldes entfällt das Randintegral komplett. Somit reduziert sich die erste Variation zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_t)\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{M}^m_t} \left\langle \frac{2}{m}\Big(\underbrace{\Delta^{\perp}_{g_t}\vec{H}_t}_{①} + \underbrace{\bar{R}_t(\vec{H}_t)}_{②} + \underbrace{\bar{A}_t(\vec{H}_t)}_{③} \Big) - m\,|\vec{H}_t|^2_{g^*_t}\,\vec{H}_t\,,\, V^{\perp}_t \right\rangle_{g^*_t} \mathrm{d}\mu_{g_t}\Big|_{t=0}. \tag{2.4}$$

Die Auswertung der ersten Variation und die Bestimmung der Willmore-Gleichung teilen wir auf fünf Schritte auf.

Schritt 1: Vorbetrachtungen.

Wie in der Formulierung des Satzes arbeiten wir bei $t = 0$ und werden den Index 0 der Einfachheit halber einfach weglassen. Im Hyperflächen-Fall können wir $\vec{H} = HN$ für ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmtes Einheitsnormalenvektorfeld N an $\mathcal{M}^m$ schreiben.

Weiter impliziert das Lemma von Schur (siehe [*Jost, 2005*, Theorem 3.3.2]), dass für $m \geq 2$ die Isotropie der Schnittkrümmungen deren Homogenität nach sich zieht, d. h. $\tilde{K}(\xi_q, \nu_q) = \text{const}$ auf

$T\mathcal{N}^{m+1}$ für linear unabhängige $\xi_q, \nu_q \in T_q\mathcal{N}^{m+1}$. Insbesondere ist damit die skalare Krümmung auf $\mathcal{N}^{m+1}$ auch konstant, da

$$\tilde{S}(q) \;=\; \sum_{i,j=1}^{m+1} \widetilde{\mathrm{Riem}}(F_i, F_j, F_j, F_i)\big|_q \;=\; \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m+1} \tilde{K}(F_i, F_j)\big|_q \;=\; (m^2+m)\, \underbrace{\tilde{K}(F_i, F_j)}_{i\neq j}\big|_q \;=:\; \tilde{S}$$

für einen orthonormalen Frame $\{F_i\}$ auf $\mathcal{N}^{m+1}$.

Für die Berechnung der einzelnen Terme der ersten Variation wählen wir zudem *Normalkoordinaten* um $p \in \mathcal{M}^m$ (siehe auch Kapitel A.3 im Anhang). In diesen Koordinaten erfüllt der dazugehörige Koordinatenframe $E_i := \partial_{x^i}$ dann $g_{ij}(p) := g_p(E_i(p), E_j(p)) = \delta_{ij}$ und $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, sodass $\nabla_{E_i} E_j|_p = 0$.

Schritt 2: Berechnung von Term 1.

Zunächst beachten wir, dass wir wegen der Normierung von N

$$0 \;\equiv\; E_i\big(\underbrace{\langle N, N\rangle_{g^*}}_{\equiv 1}\big) \;=\; 2\left\langle \nabla^*_{E_i} N, N\right\rangle_{g^*} \;=\; 2\left\langle \nabla^\perp_{E_i} N, \underbrace{N}_{\neq 0}\right\rangle_{g^*} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^\perp_{E_i} N \;\equiv\; 0$$

erhalten. Somit ist

$$\nabla^\perp_{E_i} \vec{H} \;=\; E_i(H)\, N + H\, \underbrace{\nabla^\perp_{E_i} N}_{\equiv 0} \;=\; E_i(H)\, N\,.$$

Mit der Definition des Laplace-Operators auf dem Normalenbündel (siehe auch Anhang A.5.2) und des Laplace-Beltrami-Operators berechnen wir dann

$$\begin{aligned}(\Delta_g^\perp\, \vec{H})(p) \;&=\; \sum_{i=1}^m \nabla^{\perp^2}_{E_i,E_i} \vec{H}|_p \;=\; \sum_{i=1}^m \Big(\nabla^\perp_{E_i} \nabla^\perp_{E_i}(HN)\Big)\Big|_p \;=\; \sum_{i=1}^m \Big(\nabla^\perp_{E_i}\big(E_i(H)\, N\big)\Big)\Big|_p \\ &=\; \sum_{i=1}^m \Big(E_i\big(E_i(H)\big)\, N\Big)\Big|_p \;=\; \left(\sum_{i=1}^m \nabla^2_{E_i,E_i} H\right)\Bigg|_p N(p) \;=\; \big(\Delta_g\, H(p)\big)\, N(p)\,.\end{aligned}$$

Schritt 3: Berechnung von Term 2.

Für $m \geq 2$ haben wir mit der Notation $\bar{R} = \bar{R}_0$

$$\begin{aligned}\big(\bar{R}(\vec{H})\big)(p) &= \sum_{i=1}^m \big(R_{\tilde{\nabla}}(\vec{H}, E_i)E_i\big)^\perp\big|_p \\ &= \sum_{i=1}^m H(p)\left\langle R_{\tilde{\nabla}}(N, E_i)E_i, N\right\rangle_{g^*}\Big|_p N(p) \\ &= \sum_{i=1}^m H(p)\, \underbrace{\widetilde{\mathrm{Riem}}(N, E_i, E_i, N)}_{=\tilde{K}(N,E_i) = \frac{1}{m^2+m}\tilde{S}}\big|_p N(p) \\ &= \frac{1}{m+1}\, H(p)\, \tilde{S}\, N(p)\,.\end{aligned}$$

Die Rechnung für $m = 1$ liefert das gleiche Ergebnis, da

$$\widetilde{\mathrm{Riem}}(N, E_1, E_1, N)\big|_p \;=\; \tilde{K} \;=\; \frac{1}{2}\,\tilde{S}\,.$$

Schritt 4: Berechnung von Term ③.

Wir rechnen einfach, auch hier wieder mit der Notation $\bar{A} = \bar{A}_0$,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\vec{H})(p) &= -\sum_{i=1}^{m} B\big(E_i, \nabla^{\top}_{E_i}\vec{H}\big)\big|_p \\
&= -\sum_{i=1}^{m} H(p)\, B\Bigg(E_i\,,\, \sum_{j=1}^{m} \big\langle \nabla^{\top}_{E_i} N, E_j\big\rangle_g\, E_j\Bigg)\Bigg|_p \\
&= -\sum_{i,j=1}^{m} H(p)\, B(E_i, E_j)|_p \,\big\langle \nabla^{\top}_{E_i} N, E_j\big\rangle_g\Big|_p\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$\big\langle \nabla^{\top}_{E_i} N, E_j\big\rangle \;=\; \big\langle \nabla^{*}_{E_i} N, E_j\big\rangle \;=\; E_i\big(\underbrace{\langle N, E_j\rangle}_{=0}\big) - \big\langle N, \nabla^{*}_{E_i} E_j\big\rangle \;=\; -\big\langle N, \nabla^{\perp}_{E_i} E_j\big\rangle \;=\; -b(E_i, E_j)\,.$$

Mit $b_{ij} := b(E_i, E_j) = \langle N, B(E_i, E_j)\rangle$ erhalten wir dann

$$\bar{A}(\vec{H})(p) \;=\; \sum_{i,j=1}^{m} H(p)\, b_{ij}(p)^2\, N(p) \;=\; H(p)\left(\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(p)^2\right) N(p)\,.$$

Für die übrig gebliebene Summe rechnen wir mithilfe der Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(p)^2 - m^2\, H(p)^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(p)^2 - \sum_{i,j=1}^{m} b_{ii}(p)\, b_{jj}(p) \\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \big(b_{ij}(p)^2 - b_{ii}(p)\, b_{jj}(p)\big) \\
&\overset{\text{Satz 1.1.5}}{=} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \big(\underbrace{\widetilde{\mathrm{Riem}}_{ijji}(p)}_{=\frac{1}{m^2+m}\tilde{S}} - \mathrm{Riem}_{ijji}(p)\big) \\
&= \frac{m-1}{m+1}\,\tilde{S} - S(p)\,.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den dritten Term insgesamt also

$$\bar{A}(\vec{H})(p) = H(p)\left(m^2\, H(p)^2 - S(p) + \frac{m-1}{m+1}\tilde{S}\right) N(p)\,.$$

Schritt 5: Bestimmung der Willmore-Gleichung.

Die Berechnung der drei Terme in den Schritten 2, 3 und 4, eingesetzt in die erste Variation aus Gleichung (2.4), ergibt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(f_t)\big|_{t=0}$$

$$= \int_{\mathcal{M}_t^m} \left\langle \frac{2}{m}\Big(\Delta_{g_t}^{\perp} \vec{H}_t + \bar{R}_t(\vec{H}_t) + \bar{A}_t(\vec{H}_t)\Big) - m\,|\vec{H}_t|^2_{g_t^*}\,\vec{H}_t\,,\, V_t^{\perp}\right\rangle_{g_t^*} \mathrm{d}\mu_{g_t}\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{\mathcal{M}^m} \left(\frac{2}{m}\left(\Delta_g H + \frac{1}{m+1}\tilde{S}\,H + m^2 H^3 - SH + \frac{m-1}{m+1}\tilde{S}\,H\right) - m\,H^3\right)\langle N_{t=0}, V_{t=0}^{\perp}\rangle_{g^*}\,\mathrm{d}\mu_g$$

$$= \frac{2}{m}\int_{\mathcal{M}^m}\left(\Delta_g H + \frac{m^2}{2}H^3 - SH + \frac{m}{m+1}\tilde{S}\,H\right)\langle N_{t=0}, V_{t=0}^{\perp}\rangle_{g^*}\,\mathrm{d}\mu_g\,.$$

Da V bis auf die Randbedingungen beliebig sein darf, erfüllt die Willmore-Immersion f die Willmore-Gleichung

$$0 \,=\, \Delta_g H + \frac{m^2}{2}H^3 - SH + \frac{m}{m+1}\tilde{S}\,H \qquad \text{auf } \mathcal{M}^m\,.$$

□

Im Fall von Flächen im $\mathbb{R}^3$ reduziert sich die Willmore-Gleichung zu der bereits in der Einleitung erwähnten Variante

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) \,=\, 0 \qquad \text{auf } \mathcal{M}^2\,,$$

da Schnittkrümmungen im $\mathbb{R}^3$ verschwinden und der Zusammenhang $S = 2K$ zwischen der skalaren und der Grauß-Krümmung einer Fläche $\mathcal{M}^2$ besteht. Diese Willmore-Gleichung wurde bereits von [Thomson, 1923] gefunden.

2.3. Das Flächen- und das Helfrich-Funktional

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, lässt sich das Flächenfunktional als Gegenstück des Willmore-Funktionals als eine elastische Energie auffassen. In realistischeren Modellen sind beide Funktionale zu berücksichtigen, was auf die Definition des Helfrich-Funktionals führt. Aus mathematischer Sicht lässt sich dieses für kleine Flächenanteile auch insofern auffassen, dass der Flächenanteil die Symmetrie aus Satz 2.1.2 bricht, um dadurch eventuelle Probleme in der Analysis von Willmore-Flächen zu vermeiden. Wir fassen hier die Definitionen des Flächen- und Helfrich-Funktionals zusammen und geben die erste Variation des Flächenfunktionals sowie die Euler-Lagrange-Gleichungen beider Funktionale an.

Wir betrachten hier wieder eine gegebene Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und adaptieren die Notationen der vorangegangenen Unterkapitel. Zunächst einmal tragen wir die Definition und erste Variation des Flächenfunktionals zusammen.

2.3.1 Definition (Flächenfunktional)
Das **Flächenfunktional** der Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist definiert als

$$\mathcal{A}(f) \,:=\, \mathrm{vol}_g(\mathcal{M}) \,=\, \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\mu_g\,.$$

♦

2.3.2 Hilfssatz (Erste Variation des Flächenfunktionals)
Für eine Variation F von $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ mit Immersionen $f_t = F(t,\cdot)\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$, sodass $f_0 = f$, berechnet sich die erste Variation des Flächenfunktionals zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(f_t)\Big|_{t=0} = -m\int_{\mathcal{M}_t^m}\langle \vec{H}_t, V_t^\perp\rangle_{g_t^*}\,\mathrm{d}\mu_{g_t}\Big|_{t=0} + \int_{\partial\mathcal{M}_t^m}\langle V_t^\top, \eta\rangle_{g_t}\,\mathrm{d}\mu_{\partial g_t}\Big|_{t=0},$$

wobei η hier wieder das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{M}^m$ ist.

Beweis: Der Beweis ist prinzipiell ein Spezialfall von Hilfssatz 2.2.1, lässt sich aber auch in [Persson, 2003, Proposition 4.1] nachlesen. □

Aus historischen Gründen werden die kritischen Punkte des Flächenfunktionals als *Minimalflächen* bezeichnet und dürfen nicht zwangsweise mit Flächen verwechselt werden, welche das Flächenfunktional minimieren.

2.3.3 Definition (Minimalfläche)
Eine Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, für welche das Flächenfunktional kritisch ist, d. h., es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(f_t)\big|_{t=0} = 0$$

für eine vorgegebene Menge von Variationen von f, nennt man eine **minimale Immersion** bzw. im Fall von Flächen, also falls $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$, auch eine **Minimalfläche**. ♦

Im Gegensatz zur ersten Variation des Willmore-Funktionals reicht es beim Flächenfunktional aus,

$$V_{t=0} \equiv 0 \tag{2.5}$$

als Dirichlet-Randbedingung für das Variationsvektorfeld V einer Variation F von f zu fordern, um das Verschwinden des Randintegrals in der ersten Variation aus Hilfssatz 2.3.2 zu erreichen.

2.3.4 Satz (Dirichlet-Problem für Minimalflächen)
Minimale Immersionen f bezüglich aller Variationen, welche die Dirichlet-Randbedingung aus Gleichung (2.5) *erfüllen, lösen die* ***Minimalflächengleichung***

$$\vec{H} \equiv 0$$

als Euler-Lagrange-Gleichung des Flächenfunktionals $\mathcal{A}$.

Beweis: Die Minimalflächengleichung folgt direkt aus der ersten Variation des Flächenfunktionals aus Satz 2.3.2, denn nach Voraussetzung verschwindet das Randintegral der ersten Variation und es ist

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(f_t)\big|_{t=0} = -m\int_{\mathcal{M}_t^m}\langle \vec{H}_t, V_t^\perp\rangle_{g_t^*}\,\mathrm{d}\mu_{g_t}\Big|_{t=0} = -m\int_{\mathcal{M}^m}\langle \vec{H}, V_{t=0}^\perp\rangle_{g^*}\,\mathrm{d}\mu_g\,,$$

sodass $\vec{H} = 0$ sein muss, da V bis auf die Randbedingung beliebig sein darf. □

Minimalflächen bezüglich einer hinreichend großen Klasse von Variationen sind automatisch auch kritische Punkte des Willmore-Funktionals und damit Willmore-Flächen, da diese das Willmore-Funktional minimieren. Dies folgt direkt aus

$$0 \leq \mathcal{W}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{M}^m} \underbrace{|\vec{H}|^2_{g^*}}_{\equiv 0} \,\mathrm{d}\mu_g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{W}(f) = 0\,.$$

Nachdem wir nun das Flächenfunktional eingeführt haben, können wir uns dem Helfrich-Funktional zuwenden. Wir tragen auch hier die Definition sowie das Dirichlet-Problem für Helfrich-Flächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung zusammen.

2.3.5 Definition (Helfrich-Funktional)
Für ein $\varepsilon \geq 0$ definieren wir das **Helfrich-Funktional $\boldsymbol{\mathcal{H}_\varepsilon}$** einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ als Summe des Willmore-Funktionals $\mathcal{W}$ aus Definition 2.1.1 und des mit ε gewichteten Flächenfunktionals $\mathcal{A}$ aus Definition 2.3.1

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f) := \mathcal{W}(f) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f) = \int_{\mathcal{M}} |\vec{H}|^2_{g^*} \,\mathrm{d}\mu_g + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\mu_g\,.$$

♦

Wir könnten nun auch wieder die erste Variation des Helfrich-Funktionals berechnen, indem wir die Hilfssätze 2.2.1 und 2.3.2 kombinieren. Wir werden diesen Schritt allerdings übergehen, um uns Schreibarbeit zu sparen. Den kritischen Punkten des Helfrich-Funktionals geben wir dann wieder einen eigenen Namen.

2.3.6 Definition (Helfrich-Fläche)
Unter einer **Helfrich-Immersion** verstehen wir eine Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, welche kritisch für das Helfrich-Funktional $\mathcal{H}_\varepsilon$ ist, sodass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_\varepsilon(f_t)\big|_{t=0} = 0$$

bezüglich einer vorgegebenen Menge von Variationen von f gilt. Im Fall von Flächen, also falls $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$, nennen wir diese auch eine **Helfrich-Fläche**. ♦

Die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung des Helfrich-Funktionals heißt dann *Helfrich-Gleichung*. Wir geben diese nun wie beim Willmore-Funktional in Kapitel 2.2 für Hyperflächen in Räumen konstanter Krümmung an. Dafür merken wir noch an, dass wir nun wieder die etwas restriktiveren Dirichlet-Randbedingung aus Gleichung (2.2) an die entsprechenden Variationen fordern, um das Verschwinden des Randterms der ersten Variation garantieren zu können.

2.3.7 Satz (Dirichlet-Problem für Helfrich-Hyperflächen in ambienten Räumen konstanter Schnittkrümmung)

Mit denselben Voraussetzungen und in derselben Notation wie in Satz 2.2.3 erfüllt eine Helfrich-Immersion $f\colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^{m+1}$ die ***Helfrich-Gleichung***

$$\Delta_g H + \frac{m^2}{2} H^3 - SH + \frac{m}{m+1} \tilde{S}\, H - \frac{m^2 \varepsilon}{2} H \;=\; 0 \qquad \textit{auf}\ \mathcal{M}^m\,.$$

Das Finden von Helfrich-Immersionen (bzw. Helfrich-Flächen) bei vorgegebenen Dirichlet-Randdaten bezeichnet man auch als ***Dirichlet-Problem für Helfrich-Immersionen*** *(bzw.* ***-Flächen****).*

Beweis: Man kombiniere Hilfssatz 2.2.1 und 2.3.2, um die erste Variation des Helfrich-Funktionals zu berechnen. Für diese geht man dann analog wie in Satz 2.2.3 und Satz 2.3.4 vor, um so die Helfrich-Gleichung für Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung zu erhalten. □

Helfrich-Flächen im $\mathbb{R}^3$ erfüllen demnach die Helfrich-Gleichung

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) - 2\varepsilon H \;=\; 0 \qquad \text{auf}\ \mathcal{M}^2\,.$$

3. Das Willmore- und Helfrich-Funktional für Rotationsflächen

Als eine relativ einfache Klasse von Flächen interessieren wir uns in dieser Arbeit für *Rotationsflächen*. Dies sind Flächen, welche man durch Rotation einer ebenen Kurve, der *Profilkurve*, erhält. Wegen der Rotationssymmetrie lassen sich geometrische Größen, wie die erste und zweite Fundamentalform und damit das Flächen-, das Willmore- und insbesondere auch das Helfrich-Funktional durch die Profilkurve ausdrücken. Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen reduzieren sich effektiv auf ein eindimensionales Problem. Dadurch bieten Rotationsflächen einen guten Startpunkt, sich mit Minimierern des Helfrich-Funktionals, wie wir es in Teil II durchführen werden, auseinanderzusetzen. Es zeigt sich, dass die Analysis solcher Flächen immer noch hinreichend komplex ist, um davon lernen zu können.

In Kapitel 3.1 beginnen wir zunächst einmal mit der Definition von Rotationsflächen, für welche wir dann die Fundamentalformen und die mittlere sowie Gauß-Krümmung ausrechnen. Das Willmore-Funktional und die Willmore-Gleichung für Rotationsflächen sind dann in Kapitel 3.2 angegeben. Es zeigt sich weiter, dass sich das Willmore-Funktional der Rotationsfläche bis auf einen Randterm durch das Willmore-Funktional der Profilkurve im *hyperbolischen Halbraum* beschreiben lässt, was wir in Kapitel 3.3 zusammenfassen werden. Kapitel 3.4 gibt dann nach Einführung des Flächenfunktionals das Helfrich-Funktional und die Helfrich-Gleichung für Rotationsflächen an, wofür wir in Kapitel 3.5 einige einfache Beispiele angeben wollen. In den letzten beiden Kapiteln 3.6 und 3.7 geben wir dann noch eine Abschätzung der Willmore-Energie und der Fläche durch die Helfrich-Energie an und diskutieren die Minimierer des Flächenfunktionals in der Klasse der Rotationsflächen.

3.1. Geometrie von Rotationsflächen

In diesem Kapitel definieren wir den Begriff einer Rotationsfläche und fassen ihre wichtigsten geometrischen Eigenschaften, also die erste und zweite Fundamentalform sowie die mittlere und die Gauß-Krümmung, zusammen.

Rotationsflächen werden durch entsprechende *Profilkurven* in der Ebene erzeugt. Um Singularitäten solcher Flächen zu vermeiden, fordern wir, dass diese Profilkurven in der (**offenen**) **oberen Halbebene**

$$\mathbb{H}^2 := \left\{p \in \mathbb{R}^2 : p^2 > 0\right\}$$

verlaufen. Wir verstehen $\mathbb{H}^2$ stets mit der kanonischen globalen Karte $y = \mathrm{id}_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}^2$ und, für dieses Kapitel, mit der ersten Fundamentalform, hier ebenso mit g_{euc} bezeichnet, als Pullback der euklidischen Metrik der Einbettung in $\mathbb{R}^2$ ausgestattet. In Kapitel 3.3 werden wir $\mathbb{H}^2$ allerdings noch mit einer anderen Metrik versehen.

3.1.1 Rotationsfläche

Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Unter einer **Rotationsfläche** verstehen wir hier die zweidimensionale berandete Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{R} := \mathcal{I} \times \mathbb{S}^1 = \mathcal{I} \times \mathbb{R}/2\pi$, also das kartesische Produkt $\mathcal{I} \times [0, 2\pi]$, bei dem wir $\mathcal{I} \times \{0\}$ mit $\mathcal{I} \times \{2\pi\}$ identifizieren, zusammen mit einer C^k-Immersion $f_\gamma \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f_\gamma(x, \varphi) := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{= \text{Rotation um Winkel } \varphi} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma^1(x) \\ \gamma^2(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\gamma \text{ eingebettet} \\ \text{in } x\text{-}y\text{-Ebene} \\ \text{des } \mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \gamma^1(x) \\ \gamma^2(x)\, \cos\varphi \\ \gamma^2(x)\, \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad (x, \varphi) \in \mathcal{I} \times [0, 2\pi]\,,$$

für eine C^k-glatte reguläre Kurve $\gamma \colon \mathcal{I} \to \mathbb{H}^2$, sodass $\gamma^2(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{I}$. Die Kurve γ nennt man die **Profilkurve** der Rotationsfläche.

Für den speziellen Fall, dass sich die Profilkurve als Graph über $\mathcal{I}$ schreiben lässt, es also eine Funktion $u \in C^k(\mathcal{I})$ mit $u > 0$ gibt, sodass

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \qquad \text{für } x \in \mathcal{I}\,,$$

erhalten wir eine C^k-Einbettung

$$f_u(x, \varphi) := f_\gamma(x, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ u(x)\, \cos\varphi \\ u(x)\, \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{mit } (x, \varphi) \in \mathcal{I} \times [0, 2\pi]\,,$$

da f_u injektiv und $\mathcal{R}$ kompakt ist (siehe Kapitel 1.1). In diesem Fall nennen wir dann u die Profilkurve der Rotationsfläche (siehe auch Bild 3.1).

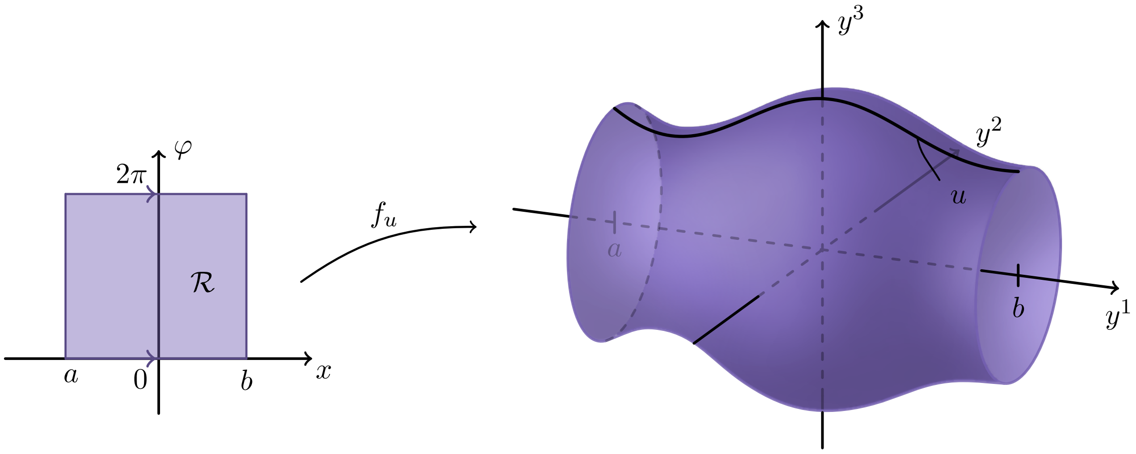


Bild 3.1: Darstellung einer Rotationsfläche $\mathcal{R}$ mit Profilkurve u.

■

3.1.2 Bemerkung

(a) Die Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{R}$ einer Rotationsfläche verstehen wir stets mit der kanonischen differenzierbaren Struktur versehen, welche durch die folgenden vier Karten induziert wird:

$$x_i \colon U_i \subset \mathcal{R} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad x_i \;=\; \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}/2\pi}\,, \qquad i = 1,2,3,4,$$

mit Koordinatenumgebungen (sei hier $\mathcal{I} = [a,b]$)

$$\begin{aligned} U_1 &= [a,b) \times (0,2\pi)\,, & U_2 &= [a,b) \times (\pi,3\pi)/2\pi\,,\\ U_3 &= (a,b] \times (0,2\pi)\,, & U_4 &= (a,b] \times (\pi,3\pi)/2\pi\,. \end{aligned}$$

Die differenzierbare Struktur ist in der Hinsicht kanonisch, dass sich die Rechnungen in Koordinaten des angegebenen Atlasses wie Rechnungen bezüglich des globalen Frames $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}$ (kurz $\{\partial_x, \partial_\varphi\}$) verhalten. Wir setzen $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, d. h., der Index $i = 1$ beschreibt immer die x- und $i = 2$ die φ-Richtung. Im Folgenden werden wir immer bezüglich dieser Koordinaten rechnen und die Indizes bezüglich der Koordinaten, aufgrund der Korrespondenz zum globalen Frame, weglassen.

Für künftige Zwecke fordern wir zunächst $k \geq 2$ (bzw. entsprechend $k \geq 4$ für die jeweiligen Euler-Lagrange-Gleichungen von Willmore- und Helfrich-Funktional) für den Differentiationsgrad, sodass f_u eine C^2-Immersion ist (bzw. C^4). Insbesondere muss dann $u \in C^2(\mathcal{I})$ (bzw. $C^4(\mathcal{I})$) sein. In Teil II müssen wir diese Forderung allerdings fallen lassen und allgemeinere Funktionenräume zulassen, was aber kein Problem darstellt, da wir dort alleine mit den berechneten Größen, wie z. B. der Metrik und der mittleren Krümmung, in Abhängigkeit der Profilkurve u arbeiten und die geometrische Interpretation vernachlässigen können.

(b) Möglicherweise sind auch geschlossene Profilkurven γ in der Definition von Rotationsflächen interessant, sodass für $\mathcal{R}$ die Ränder des Intervalls $\mathcal{I}$ identifiziert werden, was $\mathcal{R}$ nun zu einer randlosen Mannigfaltigkeit macht. In dieser Arbeit sind wir allerdings an Randwertproblemen interessiert und werden uns deshalb stets auf den berandeten Fall konzentrieren. ■

Im Folgenden berechnen wir die erste und zweite Fundamentalform einer gegebenen Rotationsfläche, um mit diesen dann die mittlere und Gauß-Krümmung der Rotationsfläche zu erhalten. Die geometrischen Größen einer Rotationsfläche werden stets mit der Profilkurve γ als Index angedeutet. In den graphischen Fällen, d. h., wenn die Profilkurve durch den Graph der Funktion u gegeben ist, schreiben wir u als Index. Es sei bereits drauf hingewiesen, dass in den meisten geometrischen Größen ausschließlich die x-Richtung der Rotationsfläche auftaucht, die Größen somit unabhängig vom Rotationswinkel φ werden.

3.1.3 Metrik, erste Fundamentalform

Zusammen mit dem Pullback der euklidischen Metrik g_{euc} auf $\mathbb{R}^3$ erhalten wir die erste Fundamentalform $g_\gamma = f_\gamma^* g_{\mathrm{euc}}$ auf $\mathcal{R}$, sodass f_γ eine isometrische Immersion ist. $(\mathcal{R}, g_\gamma)$ ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit und wir berechnen die Komponenten von g_γ bezüglich des globalen

Frames $\{\partial_x, \partial_\varphi\}$. Wir rechnen

$$g_{\gamma,\,ij} \;=\; (f_\gamma^* g_{\mathrm{euc}})_{ij} \;=\; f_\gamma^* g_{\mathrm{euc}}\big(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}\big) \;=\; g_{\mathrm{euc}}\big(f_{\gamma\,*}\partial_{x^i}\,,\, f_{\gamma\,*}\partial_{x^j}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_\gamma^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial f_\gamma^k}{\partial x^j}\,,$$

wobei $f_\gamma^k = y^k \circ f_\gamma$ die k-te Komponente von f_γ in der Standardkarte $y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ im $\mathbb{R}^3$ ist. Weiter ist

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial x^1}(x,\varphi) \;=\; \frac{\partial f_\gamma}{\partial x}(x,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \dot\gamma^1(x) \\ \dot\gamma^2(x)\,\cos\varphi \\ \dot\gamma^2(x)\,\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_\gamma}{\partial x^2}(x,\varphi) \;=\; \frac{\partial f_\gamma}{\partial \varphi}(x,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma^2(x)\,\sin\varphi \\ \gamma^2(x)\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$\big(g_{\gamma,\,ij}(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} \dot\gamma^1(x)^2 + \dot\gamma^2(x)^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2(x)^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} |\dot\gamma(x)|^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2(x)^2 \end{pmatrix},$$

$$G_\gamma(x,\varphi) \;:=\; \det(g_{\gamma,ij}) \;=\; \gamma^2(x)^2 \left(\dot\gamma^1(x)^2 + \dot\gamma^2(x)^2\right) \;=\; \gamma^2(x)^2\, |\dot\gamma(x)|^2\,.$$

Für den graphischen Fall mit $f_u = f_\gamma$ erhält man somit

$$\big(g_{u,\,ij}(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} 1 + u'(x)^2 & 0 \\ 0 & u(x)^2 \end{pmatrix}, \qquad G_u(x,\varphi) \;=\; u(x)^2\,\big(1 + u'(x)^2\big)\,.$$

■

3.1.4 Zweite Fundamentalform

Rotationsflächen sind definitionsgemäß in den $\mathbb{R}^3$ immersierte Hyperflächen, d. h. mit Kodimension 1. Mit $N_\gamma \in C^\infty(N\mathcal{R})$ wollen wir dann das *innere* Einheitsnormalenvektorfeld, d. h. das Einheitsnormalenvektorfeld, welches beispielsweise im graphischen Fall auf die Rotationsachse zeigt, bezeichnen, für welches wir die Berechnung aus Lemma 1.1.6 anwenden wollen. Wir adaptieren die Notation aus dem Lemma, sodass das gesuchte Einheitsnormalenvektorfeld dann durch

$$N_\gamma \;=\; \sum_{k=1}^{3} N_\gamma^k\, F_k \qquad \text{mit} \quad \big(N_\gamma^k(x,\varphi)\big)_k \;=\; \frac{\frac{\partial f_\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial f_\gamma}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial f_\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial f_\gamma}{\partial \varphi}\right|}\Bigg|_{(x,\varphi)} \;=\; \frac{1}{|\dot\gamma(x)|} \begin{pmatrix} \dot\gamma^2(x) \\ -\dot\gamma^1(x)\,\cos\varphi \\ -\dot\gamma^1(x)\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

bezüglich des Standardframes $F_k = \partial_{y^k}\big|_{f_\gamma}$ gegeben ist. Die zweite Fundamentalform $B_\gamma\colon \mathfrak{X}(\mathcal{R}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{R}) \to C^\infty(N\mathcal{R})$ lässt sich nach Lemma 1.1.6 in der Form

$$B_\gamma(X,Y) \;=\; b_\gamma(X,Y)\, N_\gamma$$

schreiben mit der skalaren zweiten Fundamentalform

$$b_{\gamma,\,ij} \;=\; b_\gamma\big(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 f_\gamma^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\,\big\langle F_k, N_\gamma \big\rangle_{g_\gamma^*}\,.$$

Wir berechnen dann

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^1\,\partial x^1} \;=\; \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x\,\partial x} \;=\; \begin{pmatrix} \ddot\gamma^1(x) \\ \ddot\gamma^2(x)\,\cos\varphi \\ \ddot\gamma^2(x)\,\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^2\,\partial x^2} \;=\; \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\varphi\,\partial\varphi} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma^2(x)\,\cos\varphi \\ -\gamma^2(x)\,\sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^1\,\partial x^2} \;=\; \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x\,\partial\varphi} \;=\; \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^2\,\partial x^1} \;=\; \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\varphi\,\partial x} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot\gamma^2(x)\,\sin\varphi \\ \dot\gamma^2(x)\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$\big(b_{\gamma,\,ij}(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \frac{1}{|\dot\gamma(x)|} \begin{pmatrix} \ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x) & 0 \\ 0 & \dot\gamma^1(x)\,\gamma^2(x) \end{pmatrix}.$$

Im graphischen Fall ergibt sich mit dem inneren Einheitsnormalenvektorfeld

$$N_u \;=\; \sum_{k=1}^{3} N_u^k\,F_k \qquad \text{mit} \quad \big(N_u^k(x,\varphi)\big)_k \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \begin{pmatrix} u'(x) \\ -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

die skalare zweite Fundamentalform zu

$$\big(b_{u,\,ij}(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{pmatrix}.$$

■

3.1.5 Mittlere Krümmung und Gauß-Krümmung

Das mittlere Krümmungsvektorfeld einer Rotationsfläche $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec H_\gamma(x,\varphi) \;=\; (H_\gamma\,N_\gamma)(x,\varphi)$$

bezüglich des inneren Einheitsnormalenvektorfeldes N_γ aus Abschnitt 3.1.4 mit der skalaren mittleren Krümmung H_γ. Mit der Inversen

$$\big(g_\gamma^{ij}(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{|\dot\gamma(x)|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2(x)^2} \end{pmatrix}$$

der ersten Fundamentalform aus Abschnitt 3.1.3 und der zweiten Fundamentalform aus Abschnitt 3.1.4 besitzt der Formoperator (siehe Abschnitt 1.1.8) die Darstellung

$$\big((s_\gamma)^i_j(x,\varphi)\big)_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} & 0 \\ 0 & \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|} \end{pmatrix}.$$

Aus der bereits vorhandenen Diagonalgestalt lassen sich die Hauptkrümmungen sofort ablesen zu

$$\kappa_{\gamma,1}(x,\varphi) \;=\; \frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} \qquad \text{und} \qquad \kappa_{\gamma,2}(x,\varphi) \;=\; \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}.$$

Nach Abschnitt 1.1.8 ergibt sich dann die mittlere Krümmung zu

$$\begin{aligned} H_\gamma(x,\varphi) &= \frac{1}{2}\big(\kappa_{\gamma,1}(x,\varphi)+\kappa_{\gamma,2}(x,\varphi)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x)-\dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3}+\frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)\end{aligned}$$

und die Gauß-Krümmung zu

$$K_\gamma(x,\varphi) \;=\; \kappa_{\gamma,1}(x,\varphi)\,\kappa_{\gamma,2}(x,\varphi) \;=\; \frac{\dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x)-\dot\gamma^1(x)^2\,\ddot\gamma^2(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|^4}\,.$$

Im graphischen Fall hat man demnach

$$\kappa_{u,1}(x,\varphi) \;=\; -\frac{u''(x)}{\big(1+u'(x)^2\big)^{3/2}} \;=\; -\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)', \quad \kappa_{u,2}(x,\varphi) \;=\; \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\,,$$

$$H_u(x,\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}-\frac{u''(x)}{\big(1+u'(x)^2\big)^{3/2}}\right), \quad K_u(x,\varphi) \;=\; -\frac{u''(x)}{u(x)\,\big(1+u'(x)^2\big)^2}\,.$$

■

Die Profilkurve lässt sich selbst auch als Immersion auffassen, für welche wir nach Kapitel 1.2 die geodätische bzw. mittlere Krümmung ausrechnen wollen. Die so erhaltene Krümmung stimmt dann mit der Hauptkrümmung in x-Richtung der entsprechenden Rotationsfläche überein.

3.1.6 Geodätische Krümmung der Profilkurve γ

Wir führen noch analoge Berechnungen für die Profilkurve $\gamma\colon \mathcal{I}\to\mathbb{H}^2$ als Immersion in $\mathbb{H}^2$ durch. Die erste Fundamentalform dieser Immersion berechnet sich zu

$$\hat g_\gamma(\partial_x,\partial_x) \;:=\; \gamma^* g_{\mathrm{euc}}(\partial_x,\partial_x) \;=\; g_{\mathrm{euc}}(\gamma_*\,\partial_x\,,\,\gamma_*\,\partial_x) \;=\; \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\gamma^k}{\partial x}\,\frac{\partial\gamma^k}{\partial x} \;=\; \big(\dot\gamma^1\big)^2+\big(\dot\gamma^2\big)^2 \;=\; |\dot\gamma|^2\,.$$

Bezüglich des *inneren* Einheitsnormalenvektorfeldes

$$\hat N_\gamma \;=\; \sum_{k=1}^{2}\hat N^k\,F_k \qquad \text{mit} \quad \big(\hat N^k_\gamma(x)\big) \;=\; \frac{1}{|\dot\gamma(x)|}\begin{pmatrix}\dot\gamma^2(x)\\ -\dot\gamma^1(x)\end{pmatrix},$$

wobei $F_k=\partial_{y^k}|_{f_\gamma}$, welches im graphischen Fall auf die y^1-Achse zeigt, berechnet sich die skalare zweite Fundamentalform dann zu (siehe wieder Lemma 1.1.6)

$$\hat b_\gamma(\partial_x,\partial_x) \;=\; \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2\gamma^k}{\partial x^2}\,\big\langle F_k,\hat N_\gamma\big\rangle_{\hat g^*_\gamma} \;=\; \frac{\ddot\gamma^1\,\dot\gamma^2-\dot\gamma^1\,\ddot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\,.$$

Als mittlere Krümmung und damit insbesondere auch als geodätische Krümmung liest man sofort

$$\kappa_\gamma(x) \;\overset{\text{Satz 1.2.4}}{=}\; \hat H_\gamma(x) \;=\; \frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x)-\dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3}$$

ab. Ein Vergleich mit Abschnitt 3.1.5 zeigt also, dass κ_γ mit der Hauptkrümmung $\kappa_{\gamma,1}$ übereinstimmt. Im graphischen Fall hat man

$$\kappa_u(x) \;=\; \hat{H}_u(x) \;=\; -\frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}} \;=\; -\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)'.$$

■

3.2. Das Willmore-Funktional für Rotationsflächen

Mit der Definition und den Vorarbeiten aus Kapitel 3.1 wollen wir nun das Willmore-Funktional aus Kapitel 2.1 und schließlich die Willmore-Gleichung aus Kapitel 2.2 für Rotationsflächen angeben. Die Notationen für Rotationsflächen aus Kapitel 3.1 werden wir hier beibehalten.

3.2.1 Satz (Willmore-Funktional von Rotationsflächen)
Das (normale) Willmore-Funktional einer Rotationsfläche $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_\gamma) &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} + \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)^2 \gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{\dot\gamma^1(x)^2}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\;\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_a^b {\kappa_\gamma}^2\;\mathrm{d}S_\gamma - \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{I} = [a,b]$ und $\mathrm{d}S_\gamma(x) := \gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x$. Zwischen dem konformen Willmore-Funktional der Rotationsfläche und dem normalen besteht die Relation

$$\mathcal{W}_c(f_\gamma) \;=\; \mathcal{W}(f_\gamma) + 2\pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b.$$

Beweis: Der erste Teil folgt aus der Definition des Willmore-Funktionals 2.1.1 zusammen mit der Rechnung aus Abschnitt 3.1.5

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_\gamma) &= \int_{\mathcal{R}} |\vec{H}_\gamma|^2_{g^*_\gamma}\;\mathrm{d}\mu_{g_\gamma} \;=\; \int_{\mathcal{R}} H_\gamma^2\;\mathrm{d}\mu_{g_\gamma} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_a^b \left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} + \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)^2 \sqrt{G_\gamma(x,\varphi)}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} + \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)^2 \gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Das Integral lässt sich dann noch umformen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_\gamma) &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \Big(\kappa_{\gamma,1}(x) + \kappa_{\gamma,2}(x)\Big)^2 \gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \kappa_{\gamma,1}(x)^2\,\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_a^b \kappa_{\gamma,2}(x)^2\,\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x \\ &\qquad + \pi\int_a^b K_\gamma(x)\,\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Mit $\kappa_{\gamma,1} = \kappa_\gamma$ (siehe 3.1.6),

$$\mathrm{d}S_\gamma(x) \;=\; \gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x$$

und

$$\begin{aligned}\int_a^b K_\gamma(x)\,\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\frac{\dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)^2\,\ddot\gamma^2(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|^4}\right)\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b \underbrace{\frac{\dot\gamma^1(x)^2\,\ddot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\dot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}}\;\mathrm{d}x\\ &= -\left[\frac{\dot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\right]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

folgt dann

$$\mathcal{W}(f_\gamma) \;=\; \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{\dot\gamma^1(x)^2}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\;\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_a^b {\kappa_\gamma}^2\;\mathrm{d}S_\gamma - \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b.$$

Für das konforme Willmore-Funktional hingegen rechnen wir wieder mit 3.1.5 und unter Berücksichtigung, dass Schnittkrümmungen im $\mathbb{R}^3$ verschwinden, d. h. $\tilde K \equiv 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_c(f_\gamma) &= \int_{\mathcal{R}} \left(|\vec H_\gamma|^2 - K_\gamma\right)\;\mathrm{d}\mu_{g_\gamma}\\ &= \mathcal{W}(f_\gamma) - \int_{\mathcal{R}} K_\gamma\;\mathrm{d}\mu_{g_\gamma}\\ &= \mathcal{W}(f_\gamma) - \int_0^{2\pi}\int_a^b K_\gamma(x)\,\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\varphi\\ &= \mathcal{W}(f_\gamma) + 2\pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b.\end{aligned}$$

□

3.2.2 Bemerkung

Die Tatsache, dass das Integral $\int_{\mathcal{R}} K_\gamma\;\mathrm{d}\mu_{g_\gamma}$ in Randterme zerfällt, ist keineswegs eine spezielle Eigenschaft von Rotationsflächen. Es ist eine Folge des Satzes von Gauß-Bonnet für Flächen mit Rand (vgl. mit Gleichung (2.1)). ■

Nun wollen wir die Willmore-Gleichung für Rotationsflächen aufbauend auf Satz 2.2.3 angeben. Im Gegensatz zur Situation aus Satz 2.2.3 schränken wir uns hier noch zusätzlich auf Variationen ein, welche Rotationsflächen wieder zu Rotationsflächen verformen, also als Variationen der Profilkurven verstanden werden können. Die Symmetrie von Rotationsflächen erlaubt es uns dennoch, trotz der eingeschränkten Klasse von Variationen und in Hinblick auf Satz 2.2.3, eine Willmore-Gleichung zu erhalten.

Sei $\Gamma\colon (-\delta,\delta)\times\mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ für ein $\delta > 0$ eine Variation von γ (siehe Kapitel 1.3), sodass $\gamma_t = \Gamma(t,\,\cdot\,)$ für alle $t \in (-\delta,\delta)$ zulässige Profilkurven entsprechender Rotationsflächen sind und $\gamma_0 = \gamma$. Diese

Variation induziert eine Variation $F_\Gamma\colon(-\delta,\delta)\times\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ der Rotationsfläche $f_\gamma\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ durch $F_\Gamma(t,p)=f_{\Gamma(t,\,\cdot\,)}(p)=f_{\gamma_t}(p)$.

Wir wollen hier weiter eine Unterklasse aller Variationen F_Γ betrachten, nämlich die F_Γ, welche durch Variationen Γ induziert werden, welche wiederum die Dirichlet-Randbedingungen

$$\gamma_t(a)=\begin{pmatrix}a\\ \alpha_1\end{pmatrix},\quad \gamma_t(b)=\begin{pmatrix}b\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \dot\gamma_t(a)=\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{12}\end{pmatrix}\neq 0\,,\quad \dot\gamma_t(b)=\begin{pmatrix}\beta_{21}\\ \beta_{22}\end{pmatrix}\neq 0 \tag{3.1}$$

für $\gamma_t=\Gamma(t,\,\cdot\,)$ für alle $t\in(-\delta,\delta)$ mit $\alpha_1,\alpha_2>0$ und $\beta_{11},\beta_{12},\beta_{21},\beta_{22}\in\mathbb{R}$ erfüllen. Wir zeigen dann, dass diese Klasse eine Unterklasse aller in Satz 2.2.3 erlaubten Variationen ist, welche die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (2.2) erhält und welche ausreicht, um eine Willmore-Gleichung für Rotationsflächen zu erhalten.

3.2.3 Satz (Dirichlet-Problem für axialsymmetrische Willmore-Flächen)
Sei $f_\gamma\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ eine Willmore-Immersion bezüglich der Variationen F_Γ von Rotationsflächen, welche die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (3.1) *erfüllen. Dann erfüllen diese Variationen die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung* (2.2) *und f_γ erfüllt die Willmore-Gleichung*

$$\Delta_{g_\gamma}H_\gamma+2H_\gamma\,(H_\gamma^2-K_\gamma)\;=\;0\qquad \textit{auf}\ \mathcal{R}\,.$$

Insbesondere erfüllt die Profilkurve γ dann die Willmore-Gleichung

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\,H_\gamma'(x)\right)\\ &\qquad+\frac{1}{2}\,H_\gamma(x)\left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x)-\dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3}-\frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)^2\;=\;0\qquad \textit{für}\ x\in(a,b),\end{aligned}$$

wobei die künstliche φ-Abhängigkeit von H_γ hier weggelassen wurde.

Beweis: Der Beweis basiert auf einen Vergleich mit dem Beweis von Satz 2.2.3. Wir teilen diesen in drei Schritte.

Schritt 1: Randbedingungen aus Satz 2.2.3 sind erfüllt.

Um in die Situation aus Satz 2.2.3 zu kommen, zeigen wir zuerst, dass die Dirichlet-Randbedingungen (3.1) der erlaubten Variationen F_Γ die dort beschriebenen Randbedingungen aus Gleichung (2.2) erfüllen. Für das Variationsvektorfeld V einer Variation F_Γ muss also $V_{t=0}\equiv 0$ und $\nabla_\eta^\perp V_{t=0}^\perp\equiv 0$ auf $\partial\mathcal{R}$ erfüllt sein, wobei η das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{R}$ ist. Bezüglich des Standardframes $F_k=\partial_{y^k}\big|_{f_\gamma}$ (wie in Abschnitt 3.1.4) hat das Variationsvektorfeld die Form

$$V_t(x,\varphi)\;=\;\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\gamma_t}\Big)(x,\varphi)\;=\;\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^1(x)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(x)\,\cos\varphi\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(x)\,\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Somit gilt auf dem Rand $\partial\mathcal{R} = \big(\{a\} \times \mathbb{S}^1\big) \cup \big(\{b\} \times \mathbb{S}^1\big)$

$$V_t(a,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^1(a) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(a)\,\cos\varphi \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(a)\,\sin\varphi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_1\,\cos\varphi \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_1\,\sin\varphi \end{pmatrix} \;=\; 0$$

und analog $V_t(b,\varphi) = 0$, sodass $V_{t=0} \equiv 0$ erfüllt ist. Für die zweite Randbedingunge ist das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld η gegeben durch $\eta = -\partial_x$ an $\{a\} \times \mathbb{S}^1$ und $\eta = \partial_x$ an $\{b\} \times \mathbb{S}^1$. Bezüglich des inneren Einheitsnormalenvektorfeldes N_γ (siehe Abschnitt 3.1.4) lässt sich $V_t^\perp$ als

$$V_t^\perp \;=\; \big\langle V_t, N_\gamma \big\rangle_{g_\gamma^*} N_\gamma$$

schreiben. Mit $\nabla_\eta^\perp N_\gamma \equiv 0$ (siehe Beweise von Satz 2.2.3) folgt

$$\nabla_\eta^\perp V_t^\perp \;=\; \nabla_\eta^\perp\Big(\big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*} N_\gamma\Big) \;=\; \eta\Big(\big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*}\Big)\, N_\gamma + \big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*}\, \underbrace{\nabla_\eta^\perp N_\gamma}_{\equiv 0} \;=\; \eta\Big(\big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*}\Big)\, N_\gamma\,.$$

Mit

$$\big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*}\Big|_{(x,\varphi)} \;=\; \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^1(x)\right)\dot\gamma_t^2(x) - \dot\gamma_t^1(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(x)\right)}{|\dot\gamma_t(x)|}$$

rechnen wir dann für die Randkomponente $\{a\} \times \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned}
\eta\Big(\big\langle V_t, N_\gamma\big\rangle_{g_\gamma^*}\Big)\Big|_{(a,\varphi)} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^1(x)\right)\dot\gamma_t^2(x) - \dot\gamma_t^1(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(x)\right)}{|\dot\gamma_t(x)|}\right)\Bigg|_{x=a} \\
&= -\frac{1}{|\dot\gamma_t(a)|}\Bigg(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^1(a)\right)\dot\gamma_t^2(a) + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^1(a)\right)}_{=0}\ddot\gamma_t^2(a) \\
&\qquad\qquad - \ddot\gamma_t^1(a)\,\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t^2(a)\right)}_{=0} - \dot\gamma_t^1(a)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^2(a)\right)\Bigg) + 0 \\
&= -\frac{1}{|\dot\gamma_t(a)|}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^1(a)\right)\dot\gamma_t^2(a) - \dot\gamma_t^1(a)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^2(a)\right)\right) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

da

$$\frac{\dot\gamma_t^1(a)}{\dot\gamma_t^2(a)} = \frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\gamma_t^1(a)}{\dot\gamma_t^2(a)}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^1(a)\right)\dot\gamma_t^2(a) - \dot\gamma_t^1(a)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma_t^2(a)\right) = 0\,,$$

falls $\beta_{12} \neq 0$, ansonsten vertauschte man Zähler und Nenner. Mit einer analogen Rechnung für die Randkomponente $\{b\} \times \mathbb{S}^1$ folgt somit $\nabla_\eta^\perp V_{t=0}^\perp \equiv 0$ auf $\partial\mathcal{R}$.

Schritt 2: Willmore-Gleichung ist erfüllt.

Bekanntermaßen besitzt $(\mathbb{R}^3, g_{\text{euc}})$ konstante Schnittkrümmungen ($\equiv 0$) und demzufolge ist $\tilde{S} = 0$. Mit $S = 2K_\gamma$ zeigt die Rechnung aus dem Beweis von Satz 2.2.3 (Schritt 1 bis 4) dann, dass

$$\int_{\mathcal{R}} \Big(\Delta_{g_\gamma} H_\gamma + 2H_\gamma \,(H_\gamma^2 - K_\gamma)\Big) \left\langle N_{t=0}, V_{t=0}^{\perp}\right\rangle_{g_\gamma^*} \,\mathrm{d}\mu_{g_\gamma} \;=\; 0\,.$$

Da $V_{t=0}^{\perp}$ parallel zu $N_{t=0}$ liegt und aufgrund der speziellen Wahl der Variationen eine vom Rotationswinkel φ unabhängige Länge besitzt, wird $\langle N_{t=0}, V_{t=0}^{\perp}\rangle_{g_\gamma}$ ebenso unabhängig von φ sein. Der gesamte Integrand ist damit unabhängig von φ und es gilt somit

$$\int_{\mathcal{I}} \Big(\Delta_{g_\gamma} H_\gamma + 2H_\gamma \,(H_\gamma^2 - K_\gamma)\Big) \left\langle N_{t=0}, V_{t=0}^{\perp}\right\rangle_{g_\gamma^*} \gamma^2 \,|\dot{\gamma}| \,\mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Dies impliziert dann wiederum die Willmore-Gleichung

$$\Delta_{g_\gamma} H_\gamma + 2H_\gamma \,(H_\gamma^2 - K_\gamma) \;=\; 0\,.$$

Schritt 3: Explizite Darstellung der Willmore-Gleichung für Rotationsflächen.

Die explizite Darstellung der Willmore-Gleichung folgt aus der lokalen Darstellung des Laplace-Beltrami-Operators (siehe auch Kapitel A.5)

$$\begin{aligned}
(\Delta_{g_\gamma} H_\gamma)(x,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{G_\gamma(x)}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G_\gamma}\; g_\gamma^{ij}\, \frac{\partial}{\partial x^j} H_\gamma \right)\Bigg|_{(x,\varphi)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G_\gamma(x)}}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{G_\gamma(x)}\; g_\gamma^{11}(x)\, \frac{\partial}{\partial x} H_\gamma(x) \right) \\
&\overset{3.1.3}{=} \frac{1}{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma^2(x)}{|\dot{\gamma}(x)|}\, H_\gamma'(x) \right)
\end{aligned}$$

für Rotationsflächen zusammen mit

$$\begin{aligned}
H_\gamma^2(x,\varphi) - K_\gamma(x,\varphi) &= \frac{1}{4}\,\big(\kappa_{\gamma,1}(x,\varphi) + \kappa_{\gamma,2}(x,\varphi)\big)^2 - \kappa_{\gamma,1}(x,\varphi)\,\kappa_{\gamma,2}(x,\varphi) \\
&= \frac{1}{4}\,\big(\kappa_{\gamma,1}(x,\varphi) - \kappa_{\gamma,2}(x,\varphi)\big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\ddot{\gamma}^1(x)\,\dot{\gamma}^2(x) - \dot{\gamma}^1(x)\,\ddot{\gamma}^2(x)}{|\dot{\gamma}(x)|^3} - \frac{\dot{\gamma}^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|} \right)^2 .
\end{aligned}$$

□

3.2.4 Willmore-Funktional und -Gleichung für den graphischen Fall

Satz 3.2.1 ausgewertet für den graphischen Fall $f_\gamma = f_u$ ergibt

$$\mathcal{W}(f_u) = \frac{\pi}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_a^b \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\;\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2} \int_a^b {\kappa_u}^2\;\mathrm{d}S_u - \pi \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right]_a^b$$

für das (normale) Willmore-Funktional und

$$\mathcal{W}_c(f_u) \;=\; \mathcal{W}(f_u) + 2\pi \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right]_a^b$$

für das konforme Willmore-Funktional, wobei $\mathcal{I} = [a, b]$. In Teil II schauen wir uns Rotationsflächen an, deren Profilkurven u am Rand verschwindende Ableitungen besitzen, d. h. $u'(a) = u'(b) = 0$, sodass insbesondere $\mathcal{W}(f_u) = \mathcal{W}_c(f_u)$. Minimieren wir das (normale) Willmore-Funktional in Klassen mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen, so minimieren wir gleichzeitig auch das konforme Willmore-Funktional in dieser Klasse.

Weiter vereinfacht sich die Willmore-Gleichung aus Satz 3.2.3 noch zu

$$\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\,H_u'(x) \right) + \frac{1}{2}\,H_u(x) \left(\frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}} \right)^2 \;=\; 0 \qquad \text{für } x \in (a, b)\,.$$

Hier wurde ebenso die künstliche φ-Abhängigkeit von H_u weggelassen. Eine Analyse des Beweises von Satz 3.2.3 zeigt sogar, dass die Willmore-Gleichung für die graphische Profilkurve u erfüllt ist, sollte die erste Variation von $\mathcal{W}$ bezüglich der Variationen Γ der Profilkurve u, welche von der Form $u + t\psi$ für ein $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{I})$ sind, verschwinden (vgl. Fundamentallemma der Variationsrechnung B.3.8). Diese Variationen berücksichtigen die Dirichlet-Randbedingungen $u(a) = \alpha_1$, $u(b) = \alpha_2$, $u'(a) = \beta_1$, $u'(b) = \beta_2$, denn es gilt $\psi(a) = \psi(b) = \psi'(a) = \psi'(b) = 0$. ■

3.3. Das hyperbolische Willmore-Funktional

Rotationsflächen sind in dem Sinne sehr spezielle Flächen, als dass sie wegen der Axialsymmetrie eine Beschreibung alleine über ihre Profilkurve zulassen. Da erste und zweite Fundamentalform nur von der Form der Profilkurve abhängen, ist die Versuchung groß, nach Geometrien zu suchen, in welcher sich eine Beschreibung des Willmore-Funktionals einer Rotationsfläche alleine aus ihrer Profilkurve ergibt.

In der Tat zeigt sich, dass das konforme Willmore-Funktional einer Rotationsfläche bis auf einen Vorfaktor mit dem Willmore-Funktional der Profilkurve in der *hyperbolischen Halbebene* übereinstimmt. Diese Beobachtung wurde unabhängig von R. Bryant und U. Pinkall gemacht (siehe [Bryant und Griffiths, 1986] und [Hertrich-Jeromin und Pinkall, 1992]). Für weitere Referenzen siehe auch [Langer und Singer, 1984 (1)] oder [Langer und Singer, 1984 (2)].

Wie bereits in der Einleitung zu Kapitel 3.1 angedeutet wurde, werden wir die obere Halbebene $\mathbb{H}^2$ hier mit der hyperbolischen Metrik versehen, um für Kurven in $\mathbb{H}^2$ das Willmore-Funktional zu berechnen. Für die Berechnungen geht man prinzipiell vor wie in den Kapiteln 3.1 und 3.2. Wir fassen die Ergebnisse hier zusammen.

3.3.1 Geometrie der hyperbolischen Halbebene

Unter der **hyperbolischen Halbebene** verstehen wir die obere Halbebene $\mathbb{H}^2$ zusammen mit der **hyperbolischen Metrik**

$$g_h(p) := \frac{1}{(p^2)^2} \sum_{i=1}^{2} \left(\mathrm{d}y^i|_p \right)^2, \qquad \left(g_{h,\,ij}(p)\right)_{ij} = \frac{1}{(p^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

geschrieben in der globalen Karte $y := \mathrm{id}_{\mathbb{H}^2} \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bezüglich dieser Karte lassen sich die Christoffel-Symbole des zu g_h gehörigen Levi-Civita-Zusammenhangs (siehe auch Satz A.3.2) zu

$$\Gamma^k_{h,\,ij}(p) = \frac{1}{p^2} \left(\delta_{ij}\, \delta_{k2} - \delta_{i2}\, \delta_{kj} - \delta_{j2}\, \delta_{ki} \right)$$

berechnen, sodass

$$\left(\Gamma^1_{h,\,ij}(p)\right)_{ij} = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\Gamma^2_{h,\,ij}(p)\right)_{ij} = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Riem}_{h,\,ijk\ell}(p) &= \frac{1}{(p^2)^2} \left(\partial_i \Gamma^\ell_{h,\,jk}(p) - \partial_j \Gamma^\ell_{h,\,ik}(p) + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^\ell_{h,\,ir}(p)\, \Gamma^r_{h,\,jk}(p) - \Gamma^\ell_{h,\,jr}(p)\, \Gamma^r_{h,\,ik}(p) \right) \right) \\ &= \frac{1}{(p^2)^4} \left(\delta_{ik}\, \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\, \delta_{kj} \right). \end{aligned}$$

Doppelte Spurbildung liefert dann die skalare Krümmung

$$\begin{aligned} S_h(p) &= \sum_{i,j=1}^{2} g_h^{ij}(p)\, \mathrm{Ric}_{h,\,ij}(p) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{2} g_h^{ij}(p)\, g_h^{k\ell}(p)\, \mathrm{Riem}_{h,\,ik\ell j}(p) = (p^2)^4 \sum_{i,k=1}^{2} \mathrm{Riem}_{h,\,ikki}(p) \\ &= \sum_{i,k=1}^{2} \left(\delta_{ik}\, \delta_{ik} - \delta_{ii}\, \delta_{kk} \right) = 2 - 4 = -2, \end{aligned}$$

sodass wir für die hyperbolische Halbebene die konstante Gauß-Krümmung $K_h = \frac{1}{2} S_h = -1$ erhalten. Weiter lassen sich auch alle Geodäten der hyperbolischen Halbebene charakterisieren. Nach [*Lee, 1997*, Prop. 5.14] parametrisieren Geodäten zusammenhängende Segmente, versehen mit einer Parametrisierung proportional zur Bogenlänge, folgender Mengen (siehe Bild 3.2):

(i) die Halbgeraden parallel zur y^2-Achse

$$\left\{ p \in \mathbb{H}^2 : \ p^1 = a, \ p^2 > 0 \right\}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$,

(ii) die (abgeschlossenen) oberen Halbkreise mit Mittelpunkt auf der y^1-Achse

$$\left\{ p \in \mathbb{H}^2 : \ \left(p^1 - a\right)^2 + \left(p^2\right)^2 = r^2, \ p^2 > 0 \right\}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

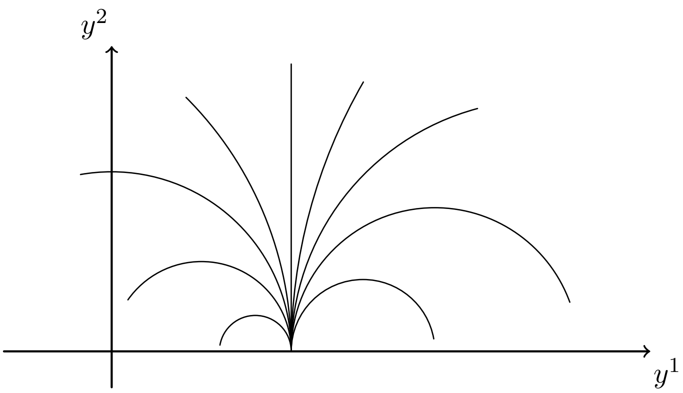


Bild 3.2: Veranschaulichung von Geodäten in der hyperbolischen Halbebene.

■

Sei nun eine Rotationsfläche $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir wollen die dazugehörige Profilkurve $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathbb{H}^2$ als Immersion in die hyperbolische Halbebene auffassen und für diese das entsprechende Willmore-Funktional berechnen, welches wir als *hyperbolisches Willmore-Funktional* bezeichnen werden. Dieses vergleichen wir dann mit dem Willmore-Funktional der Rotationsfläche f_γ. Zunächst geben wir die erste und zweite Fundamentalform sowie die mittlere bzw. geodätische Krümmung der Profilkurve γ in der hyperbolischen Halbebene an.

3.3.2 Erste und zweite Fundamentalform, mittlere und geodätische Krümmung

Für die Profilkurve $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathbb{H}^2$ als eine Immersion in die hyperbolische Halbebene berechnet sich die erste Fundamentalform bezüglich des globalen Vektorfeldes ∂_x zu

$$g_{h,\gamma}(\partial_x, \partial_x) \;:=\; \gamma^* g_h(\partial_x, \partial_x) \;=\; \frac{|\dot\gamma|^2}{(\gamma^2)^2}\,,$$

wobei $\gamma^k = y^k \circ \gamma$ für die globale Karte $y = \mathrm{id}_{\mathbb{H}^2}$ von $\mathbb{H}^2$. Bezüglich des *inneren* Einheitsnormalenvektorfeldes

$$N_{h,\gamma} \;=\; \sum_{k=1}^{2} N_{h,\gamma}^k\, F_k \qquad \text{mit} \quad \big(N_{h,\gamma}^k(x)\big)_k = \frac{\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\begin{pmatrix}\dot\gamma^2(x)\\ -\dot\gamma^1(x)\end{pmatrix}$$

lässt sich die zweite Fundamentalform ähnlich wie in der Rechnung im Beweis von Lemma 1.1.6 zu

$$b_{h,\gamma}(\partial_x, \partial_x) \;=\; \sum_{k,\ell=1}^{2} g_{h,\,k\ell}\, \ddot\gamma^k\, N_{h,\gamma}^\ell + \sum_{k,\ell,s,r=1}^{2} g_{h,\,s\ell}\, \dot\gamma^k\, \dot\gamma^r\, \Gamma_{h,\,rk}^s\, N_{h,\gamma}^\ell \;=\; \frac{\ddot\gamma^1\,\dot\gamma^2 - \dot\gamma^1\,\ddot\gamma^2}{\gamma^2\,|\dot\gamma|} - \frac{\dot\gamma^1\,|\dot\gamma|}{(\gamma^2)^2}$$

berechnen. Für die mittlere Krümmung, welche nach Satz 1.2.4 im eindimensionalen Fall mit der geodätischen Krümmung übereinstimmt, erhalten wir dann analog zur Rechnung aus Abschnitt 3.1.6

$$\kappa_{h,\gamma} \;\overset{\text{Satz 1.2.4}}{=}\; H_{h,\gamma} \;=\; \frac{\ddot\gamma^1\,\gamma^2\,\dot\gamma^2 - \dot\gamma^1\,\gamma^2\,\ddot\gamma^2}{|\dot\gamma|^3} - \frac{\dot\gamma^1}{|\dot\gamma|}\,.$$

Ein Vergleich mit den Hauptkrümmungen der von γ induzierten Rotationsfläche aus Abschnitt 3.1.5 zeigt den Zusammenhang

$$\kappa_{h,\gamma} \;=\; \gamma^2\left(\kappa_{\gamma,1}-\kappa_{\gamma,2}\right) \;=\; \gamma^2\left(\kappa_\gamma-\kappa_{\gamma,2}\right). \tag{3.2}$$

Für den graphischen Fall vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$g_{h,u}(\partial_x,\partial_x) \;=\; \frac{1+u'^2}{u^2}\,, \qquad\qquad b_{h,u}(\partial_x,\partial_x) \;=\; -\frac{1+u'^2+uu''}{u^2\sqrt{1+u'^2}}$$

und

$$\kappa_{h,u} \;=\; H_{h,u} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}-\frac{uu''}{\left(1+u'^2\right)^{3/2}}\,.$$

■

3.3.3 Hyperbolisches Willmore-Funktional und hyperbolische Willmore-Gleichung

Mit einem ähnlichen Vorgehen wie in Kapitel 3.2 lassen sich nun das entsprechende Willmore-Funktional von γ als Immersion in die hyperbolische Halbebene und die dazugehörige Willmore-Gleichung berechnen. Zur semantischen Trennung bezeichnen wir das so erhaltene Willmore-Funktional als **hyperbolisches Willmore-Funktional** der Rotationsfläche f_γ bzw. der Profilkurve γ. Dieses ist mit Abschnitt 3.3.2 gegeben durch (für $\mathcal{I}=[a,b]$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_h(\gamma) &= \int_{\mathcal{I}} |\vec{H}_{h,\gamma}|^2 \;\mathrm{d}\mu_{g_{h,\gamma}} \;=\; \int_{\mathcal{I}} \kappa_{h,\gamma}^2 \;\mathrm{d}\mu_{g_{h,\gamma}} \\
&= \int_a^b \left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\gamma^2(x)\,\dot\gamma^2(x)-\dot\gamma^1(x)\,\gamma^2(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3}-\frac{\dot\gamma^1(x)}{|\dot\gamma(x)|}\right)^2 \frac{|\dot\gamma(x)|}{\gamma^2(x)}\;\mathrm{d}x \\
&\overset{(3.2)}{=} \int_a^b \frac{\dot\gamma^1(x)^2}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\;\mathrm{d}x+\int_a^b \kappa_\gamma^2\;\mathrm{d}S_\gamma+2\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b \\
&= \frac{2}{\pi}\,\mathcal{W}(f_\gamma)+4\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b \;=\; \frac{2}{\pi}\,\mathcal{W}_c(f_\gamma)\,.
\end{aligned}$$

Die Willmore-Gleichung für das hyperbolische Willmore-Funktional ergibt sich wieder analog zu Satz 2.2.3. Sei $\gamma\colon\mathcal{I}\to\mathbb{H}^2$ eine Willmore-Immersion bezüglich des hyperbolischen Willmore-Funktionals und bezüglich der Variationen Γ von γ, welche die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (3.1) erfüllen. Man prüft auch hier wieder nach, dass die Randbedingungen aus Gleichung (2.2) erfüllt sind. Modifiziert man den Beweis von Satz 3.2.3 und berücksichtigt die Tatsache, dass skalare Krümmungen in einer Dimension verschwinden und die skalare Krümmung S_h der hyperbolischen Halbebene nach Abschnitt 3.3.1 gleich -2 ist, so erhält man als Willmore-Gleichung dann

$$\Delta_{g_{h,\gamma}} H_{h,\gamma}+\frac{1}{2}\,H_{h,\gamma}^3-H_{h,\gamma} \;=\; 0 \qquad \text{auf } \mathcal{I}\,.$$

Diese wird auch als **hyperbolische Willmore-Gleichung** bezeichnet und die Lösungen dieser werden auch **hyperbolische Elastika** genannt. Mit expliziter Berechnung des Laplace-Beltrami-Operators (siehe auch Kapitel A.5) analog zum Beweis von Satz 3.2.3 lässt sich die Gleichung ausschreiben zu

$$\frac{\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\,H'_{h,\gamma}(x)\right)+\frac{1}{2}\,H_{h,\gamma}(x)^3-H_{h,\gamma}(x)\;=\;0\qquad\text{für } x\in(a,b)\,.$$

Beispiele solcher hyperbolischen Elastika sind Kurven $\gamma\colon\mathcal{I}\to\mathbb{H}^2$, welche Segmente von oberen Halbkreisen mit Mittelpunkten auf der y^1-Achse parametrisieren, d. h.

$$\exists\; a\in\mathbb{R},\, r>0:\qquad \big(\gamma^1(x)-a\big)^2+\gamma^2(x)^2\;=\;r^2\qquad\text{für alle } x\in\mathcal{I}\,.$$

Nach Abschnitt 3.3.1 ist eine Umparametrisierung proportional zur Bogenlänge von γ eine Geodäte, sodass insbesondere die geodätische Krümmung per Definition identisch verschwindet. Nach Satz 1.2.4 ist dies gleichbedeutend mit dem Verschwinden der mittleren Krümmung, sodass die hyperbolische Willmore-Gleichung erfüllt ist. ■

In der Theorie axialsymmetrischer Willmore-Flächen ließen sich viele Resultate durch die Analogie zum hyperbolischen Willmore-Funktional gewinnen. So spielte die Kenntnis der Geodäten der hyperbolischen Halbebene eine wichtige Rolle in der Existenztheorie axialsymmetrischer Minimierer des Willmore-Funktionals (siehe z. B. [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008]). Daneben lässt sich die Tatsache ausnutzen, dass die hyperbolische Helfrich-Gleichung in Bogenlängenparametrisierung nur von der geodätischen bzw. mittleren Krümmung abhängt und sich dadurch explizit lösen lässt. Mit dieser Beobachtung ließen sich die hyperbolischen Elastika in [Langer und Singer, 1984 (1)] vollständig charakterisieren, was in [Eichmann, 2016], [Eichmann und Koeller, 2017] und [Eichmann und Grunau, 2017] ausgenutzt wurde, um viele Resultate zu axialsymmetrischen Willmore-Flächen zu gewinnen. Für unsere Zwecke werden wir weiter unten in Kapitel 5.2 vom hyperbolischen Willmore-Funktional profitieren.

3.4. Das Helfrich-Funktional für Rotationsflächen

Nachdem wir nun ausführlich das Willmore-Funktional von Rotationsflächen und die Analogie zum hyperbolischen Willmore-Funktional besprochen haben, können wir uns dem Flächen- und Helfrich-Funktional für Rotationsflächen zuwenden. Analog zum Vorgehen in den Kapiteln 2.3 und 3.2 werden wir hier zunächst das Flächenfunktional und die Minimalflächengleichung für Rotationsflächen berechnen, um dies danach auch für das Helfrich-Funktional durchführen zu können. Wir bauen hier auch wieder auf den Notationen aus Kapitel 3.1 auf und nutzen die Vorkenntnisse aus Kapitel 3.2.

3.4.1 Flächenfunktional und Minimalflächengleichung für Rotationsflächen

Das Flächenfunktional einer Rotationsfläche $f_\gamma\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ berechnet sich mithilfe von Abschnitt 3.1.3, eingesetzt in Definition 2.3.1, zu

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f_\gamma)\;&=\;\int_{\mathcal{R}}\mathrm{d}\mu_{g_\gamma}\;=\;\int_0^{2\pi}\int_a^b\sqrt{G_\gamma(x,\varphi)}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\varphi\\&=\;2\pi\int_a^b\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|\;\mathrm{d}x\;=\;2\pi\int_a^b\mathrm{d}S_\gamma\,.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Zur Bestimmung des Dirichlet-Problems für axialsymmetrische Minimalflächen gehen wir analog vor wie in Kapitel 3.2 und adaptieren die dort verwendete Notation. Für die erste Variation des Flächenfunktionals wollen wir uns auf Variationen F_Γ einschränken, welche lediglich die Dirichlet-Randbedingungen

$$\gamma_t(a) = \begin{pmatrix} a \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_t(b) = \begin{pmatrix} b \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

für $\gamma_t = \Gamma(t, \cdot)$ für alle t und für $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ erhalten. Das entsprechende Variationsvektorfeld V von F_Γ erfüllt dann wieder $V_{t=0} \equiv 0$ (siehe Beweis von Satz 3.2.3). Ein Vergleich mit dem Beweis von Folgerung 2.3.4 zeigt dann, dass eine axialsymmetrische Minimalfläche bezüglich der erlaubten Variationen die Minimalflächengleichung

$$H_\gamma \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\ddot{\gamma}^1(x)\,\dot{\gamma}^2(x) - \dot{\gamma}^1(x)\,\ddot{\gamma}^2(x)}{|\dot{\gamma}(x)|^3} + \frac{\dot{\gamma}^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|} = 0 \qquad \text{für } x \in (a,b)$$

erfüllt.

Im graphischen Fall hat das Flächenfunktional die Form

$$\mathcal{A}(f_u) = 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\;\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}S_u$$

und die Minimalflächengleichung die Gestalt

$$H_u \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}} = 0 \qquad \text{für } x \in (a,b)\,.$$

Analog zu Abschnitt 3.2.4 gilt die Minimalflächengleichung weiterhin, sollte f_u eine Minimalfläche bezüglich graphischer Variationen der Form $u + t\psi$, $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{I})$, welche insbesondere auch die hier vorgegebenen Dirichlet-Randwerte berücksichtigen, sein. ∎

Mit der Kombination der Ergebnisse von Willmore- und Flächenfunktional von Rotationsflächen können wir nun die analogen Resultate für das Helfrich-Funktional zusammentragen.

3.4.2 Helfrich-Funktional von Rotationsflächen

Kombiniert man Satz 3.2.1 zum Willmore-Funktional und Abschnitt 3.4.1 zum Flächenfunktional von Rotationsflächen, so ergibt sich das Helfrich-Funktional $\mathcal{H}_\varepsilon$ von Rotationsflächen für ein $\varepsilon \geq 0$ aus der Definition 2.3.5 zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\varepsilon(f_\gamma) &= \mathcal{W}(f_\gamma) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f_\gamma) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{\ddot{\gamma}^1(x)\,\dot{\gamma}^2(x) - \dot{\gamma}^1(x)\,\ddot{\gamma}^2(x)}{|\dot{\gamma}(x)|^3} + \frac{\dot{\gamma}^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|}\right)^2 \gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\;\mathrm{d}x + 2\pi\varepsilon\int_a^b \mathrm{d}S_\gamma \\
&= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{\dot{\gamma}^1(x)^2}{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|} + 4\varepsilon\,\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\right)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_a^b {\kappa_\gamma}^2\;\mathrm{d}S_\gamma - \pi\left[\frac{\dot{\gamma}^2}{|\dot{\gamma}|}\right]_a^b.
\end{aligned}$$

∎

3.4.3 Dirichlet-Problem für axialsymmetrische Helfrich-Flächen

Wir betrachten eine Helfrich-Immersion $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Variationen F_Γ, welche die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (3.1) erfüllen. Mit Satz 3.2.3 und der Diskussion aus Abschnitt 3.4.1 ergibt sich als Helfrich-Gleichung (vgl. auch mit Folgerung 2.3.7)

$$\Delta_{g_\gamma} H_\gamma + 2H_\gamma\,(H_\gamma^2 - K_\gamma) - 2\varepsilon H_\gamma \;=\; 0 \qquad \text{auf } \mathcal{R}\,.$$

Als explizite Darstellung erhält man wiederum

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|}\,H_\gamma'(x)\right)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\,H_\gamma(x)\left(\frac{\ddot\gamma^1(x)\,\dot\gamma^2(x) - \dot\gamma^1(x)\,\ddot\gamma^2(x)}{|\dot\gamma(x)|^3} - \frac{\dot\gamma^1(x)}{\gamma^2(x)\,|\dot\gamma(x)|}\right)^2 - 2\varepsilon\,H_\gamma(x) \;=\; 0\end{aligned}$$

für $x \in (a,b)$. ■

3.4.4 Helfrich-Funktional und -Gleichung für den graphischen Fall

Das Helfrich-Funktional aus Abschnitt 3.4.2 ausgewertet für den graphischen Fall $f_\gamma = f_u$ ergibt (vgl. mit den Abschnitten 3.2.4 und 3.4.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon(f_u) &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}}\right)^2 u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x + 2\pi\varepsilon\int_a^b \mathrm{d}S_u\\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}} + 4\varepsilon\,u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &\qquad\qquad + \frac{\pi}{2}\int_a^b {\kappa_u}^2\;\,\mathrm{d}S_u - \pi\left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right]_a^b .\end{aligned}$$

Die Helfrich-Gleichung aus Abschnitt 3.4.3 wiederum vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\,H_u'(x)\right)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\,H_u(x)\left(\frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)^2 - 2\varepsilon\,H_u(x) \;=\; 0\end{aligned}$$

für $x \in (a,b)$. Analog zu Abschnitt 3.2.4 gilt diese weiterhin, sollte f_u eine Helfrich-Fläche bezüglich graphischer Variationen der Form $u + t\psi$, $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{I})$, sein, welche die Dirichlet-Randwerte berücksichtigen. ■

3.5. Beispiele von Rotationsflächen

Zur Veranschaulichung der bisherigen Rechnungen werden wir uns diese nun noch an einigen Beispielen klarmachen. Die Notation schließt sich an die Beschreibungen der vorherigen Kapitel 3.1 bis 3.4 an.

3.5.1 Beispiel (Zylinder)
Als ein einfaches Beispiel einer graphischen Rotationsfläche betrachten wir einen **Zylinder** $f_{u_\alpha}\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$, dessen Profilkurve für ein $\alpha > 0$ durch $u_\alpha(x) := \alpha$, $x \in \mathcal{I} = [a, b]$, gegeben ist (siehe Bild 3.3). Das Flächenelement des Zylinders ist gegeben durch $\mathrm{d}S_{u_\alpha}(x) = \alpha \, \mathrm{d}x$ und die

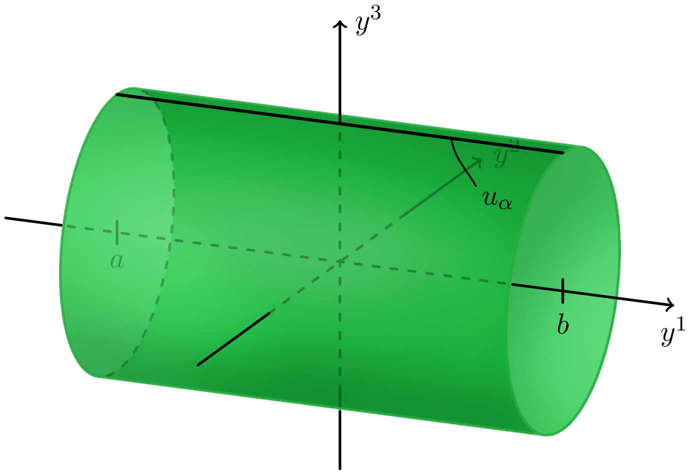


Bild 3.3: Darstellung eines Zylinders mit Profilkurve u_α.

Hauptkrümmungen durch

$$\kappa_{u_\alpha} = \kappa_{u_\alpha,1} = 0\,, \qquad \kappa_{u_\alpha,2} = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Damit ergeben sich $H_{u_\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$ als mittlere und $K_{u_\alpha} = 0$ als Gauß-Krümmung und somit letztendlich für das Willmore-, Flächen- und Helfrich-Funktional

$$\mathcal{W}(f_{u_\alpha}) = \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\alpha}(b-a)\,, \qquad \mathcal{W}_h(u_\alpha) = \frac{2}{\pi}\,\mathcal{W}(f_{u_\alpha}) = \frac{b-a}{\alpha}\,,$$

$$\mathcal{A}(f_{u_\alpha}) = 2\pi \int_a^b \alpha \,\mathrm{d}x = 2\pi\alpha(b-a)\,,$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f_{u_\alpha}) = \mathcal{W}(f_{u_\alpha}) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f_{u_\alpha}) = \frac{\pi}{2\alpha}(b-a) + 2\pi\varepsilon\alpha(b-a) = 2\pi\varepsilon(b-a)\left(\alpha + \frac{1}{4\varepsilon\alpha}\right).$$

■

3.5.2 Beispiel (Katenoid)
Katenoide $f_{u_c}\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ sind weitere Beispiele graphischer Rotationsflächen. Die Profilkurve eines Katenoids ist für ein $c > 0$ gegeben durch (vgl. Bild 3.4)

$$u_c(x) := c \cosh\left(\frac{x}{c}\right).$$

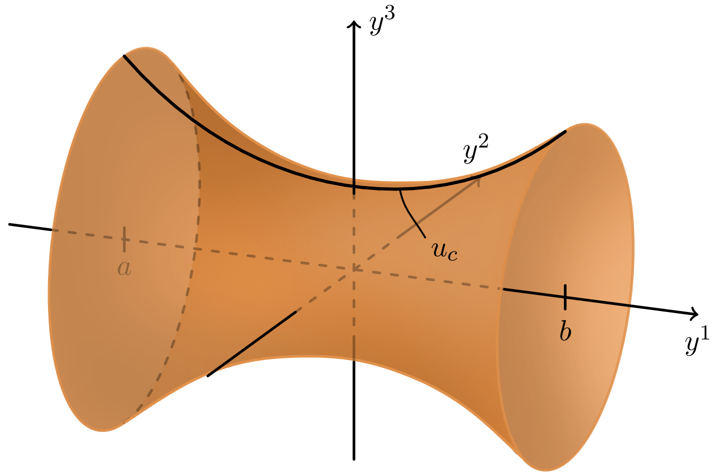


Bild 3.4: Darstellung eines Katenoids mit Profilkurve u_c.

Für dieses ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_{u_c}(x) &= u_c(x)\sqrt{1+u_c'(x)^2}\ \mathrm{d}x = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)^2\ \mathrm{d}x = \frac{c}{2}+\frac{c\cosh\left(2\frac{x}{c}\right)}{2}\ \mathrm{d}x\,,\\
\kappa_{u_c}(x) &= \kappa_{u_c,1}(x) = -\frac{u_c''(x)}{\left(1+u_c'(x)^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)^2} = -\frac{2}{c+c\cosh\left(2\frac{x}{c}\right)}\,,\\
\kappa_{u_c,2}(x) &= \frac{1}{u_c(x)\sqrt{1+u_c'(x)^2}} = \frac{2}{c+c\cosh\left(2\frac{x}{c}\right)} = -\kappa_{u_c,1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $H_{u_c}\equiv 0$ und Willmore-, Flächen- und Helfrich-Funktional berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f_{u_c}) &= 0\,,\\
\mathcal{W}_h(u_c) &= \frac{2}{\pi}\,\mathcal{W}(f_{u_c})+4\left[\frac{u_c'^{\,2}}{\sqrt{1+u_c'^2}}\right]_a^b = 4\left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{c}\right)}\right]_a^b = 4\left(\tanh\left(\frac{b}{c}\right)-\tanh\left(\frac{a}{c}\right)\right),\\
\mathcal{A}(f_{u_c}) &= 2\pi\int_a^b \mathrm{d}S_{u_c}(x) = \pi c(b-a)+\frac{\pi c^2}{2}\left[\sinh\left(\frac{2b}{c}\right)-\sinh\left(\frac{2a}{c}\right)\right],\\
\mathcal{H}_\varepsilon(f_{u_c}) &= \mathcal{W}(f_{u_c})+\varepsilon\,\mathcal{A}(f_{u_c}) = \varepsilon\,\mathcal{A}(f_{u_c})\,.
\end{aligned}$$

■

3.5.3 Beispiel (Sphäre)

Als letztes Beispiel betrachten wir das einer **Sphäre** $f_{u_r}\colon \mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ ohne Sphärenkappen. Für ein $r>\max\{a,b\}$ sei die Profilkurve der Sphäre gegeben durch $u_r(x):=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\mathcal{I}=[a,b]$ (vgl. Bild 3.5). Mit

$$u_r'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{u_r(x)}\,,\qquad u_r''(x) = -\frac{1}{u_r(x)}-\frac{x^2}{u_r(x)^3} = -\frac{r^2}{u_r(x)^3}$$

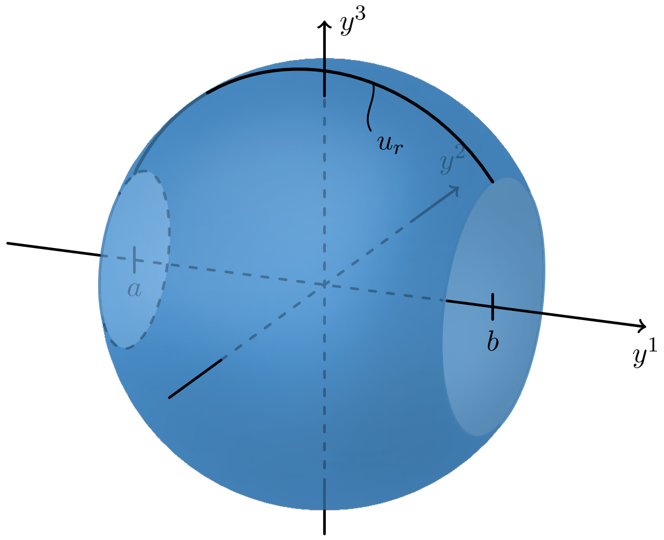


Bild 3.5: Darstellung einer Sphäre mit Profilkurve u_r.

rechnet man dann

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_{u_r}(x) &= u_r(x)\sqrt{1+u_r'(x)^2}\ \mathrm{d}x = \left[u_r(x)^2\left(1+\frac{x^2}{u_r(x)^2}\right)\right]^{1/2}\ \mathrm{d}x = r\ \mathrm{d}x\,, \\ \kappa_{u_r}(x) &= \kappa_{u_r,1}(x) = -\frac{u_r''(x)}{(1+u_r'(x)^2)^{3/2}} = -\left(-\frac{r^2}{u_r(x)^3}\right)\left(\frac{r^2}{u_r(x)^2}\right)^{-3/2} = \frac{1}{r}\,, \\ \kappa_{u_r,2}(x) &= \frac{1}{u_r(x)\sqrt{1+u_r'(x)^2}} = \frac{1}{r}\,. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich also $H_{u_r} \equiv \frac{1}{r}$ und Willmore-, Flächen- und Helfrich-Funktional berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f_{u_r}) &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \big(\kappa_{u_r,1}(x)+\kappa_{u_r,2}(x)\big)^2\ \mathrm{d}S_{u_r}(x) = \frac{2\pi}{r}\,(b-a)\,, \\ \mathcal{W}_h(u_r) &= \frac{2}{\pi}\,\mathcal{W}(f_{u_r}) + 4\left[\frac{u_r'^{\,2}}{\sqrt{1+u_r'^2}}\right]_a^b = \frac{4}{r}\,(b-a) + 4\left[-\frac{x}{r}\right]_a^b = 0\,, \\ \mathcal{A}(f_{u_r}) &= 2\pi\int_a^b \mathrm{d}S_{u_c}(x) = 2\pi r\,(b-a)\,, \\ \mathcal{H}_\varepsilon(f_{u_r}) &= \mathcal{W}(f_{u_c}) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f_{u_c}) = 2\pi\,(b-a)\left(\frac{1}{r}+\varepsilon r\right). \end{aligned}$$

■

3.6. Abschätzung der Fläche und Willmore-Energie durch Helfrich-Energie

Wir wollen nun noch eine Möglichkeit angeben, die Fläche und die Willmore-Energie einer Rotationsfläche mit der bekannten Helfrich-Energie abzuschätzen. Dies werden wir aus einer Abschätzung der L^1-Norm der zweiten Fundamentalform von Rotationsflächen nach oben und unten ermöglichen.

3.6.1 Satz
Für eine Rotationsfläche $f_\gamma \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ gilt die Abschätzung

$$\pi^2 \left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2 \leq \left(\mathcal{W}(f_\gamma) + \pi \left[\frac{\dot{\gamma}^2}{|\dot{\gamma}|}\right]_a^b\right) \mathcal{A}(f_\gamma)\,. \tag{3.4}$$

Der Gleichheitsfall ist genau dann erfüllt, wenn f_γ einen Zylinder oder einen zweidimensionalen Annulus beschreibt.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Abschätzung der L^1-Norm der zweiten Fundamentalform B_γ nach oben und unten. Wir führen den Beweis in drei Schritten.

Schritt 1: $\|B_\gamma\|_{L^1(\mathcal{R},g_\gamma)}$ nach <u>oben</u> abschätzen.

Für die Abschätzung von $\|B_\gamma\|_{L^1(\mathcal{R},g_\gamma)}$ nach oben nutzen wir den Zusammenhang zwischen dem Betragsquadrat der zweiten Fundamentalform und der mittleren und Gauß-Krümmung aus Abschnitt 1.1.9 und rechnen

$$\begin{aligned}
\|B_\gamma\|_{L^1(\mathcal{R},g_\gamma)} &= \int_{\mathcal{R}} |B_\gamma|_{g,g^*}\ \mathrm{d}\mu_{g_\gamma} \\
&= 2\pi \int_{\mathcal{I}} |B_\gamma|_{g,g^*}\ \mathrm{d}S_\gamma \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(2\pi \int_{\mathcal{I}} |B_\gamma|^2_{g,g^*}(x)\,\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(2\pi \int_{\mathcal{I}} \gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\overset{1.1.9}{=} \left(2\pi \int_{\mathcal{I}} \big(4\,H_\gamma(x)^2 - 2\,K_\gamma(x)\big)\,\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(2\pi \int_{\mathcal{I}} \gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \left(4\,\mathcal{W}(f_\gamma) - 4\pi \int_{\mathcal{I}} K_\gamma\ \mathrm{d}S_\gamma\right)^{1/2} \mathcal{A}(f_\gamma)^{1/2} \\
&= \left(4\,\mathcal{W}(f_\gamma) + 4\pi \left[\frac{\dot{\gamma}^2}{|\dot{\gamma}|}\right]_a^b\right)^{1/2} \mathcal{A}(f_\gamma)^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

Schritt 2: $\|B_\gamma\|_{L^1(\mathcal{R},g_\gamma)}$ nach <u>unten</u> abschätzen.

Für die andere Richtung rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|B_\gamma\|_{L^1(\mathcal{R},g_\gamma)} &= 2\pi \int_{\mathcal{I}} |B_\gamma|_{g,g^*} \, \mathrm{d}S_\gamma \\
&\overset{1.1.9}{=} 2\pi \int_{\mathcal{I}} \sqrt{\kappa_{\gamma,1}^2 + \kappa_{\gamma,2}^2} \, \mathrm{d}S_\gamma \\
&\geq 2\pi \int_{\mathcal{I}} |\kappa_{\gamma,2}| \, \mathrm{d}S_\gamma \\
&= 2\pi \int_{\mathcal{I}} \frac{|\dot{\gamma}^1(x)|}{\cancel{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|}} \cancel{\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)|} \, \mathrm{d}x \\
&\geq 2\pi \left| \int_a^b \dot{\gamma}^1(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= 2\pi \left| \gamma^1(b) - \gamma^1(a) \right| .
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem ersten Schritt liefert die gesuchte Abschätzung aus Gleichung (3.4).

Schritt 3: Betrachtung des Gleichheitsfalls.

Entscheidende Ungleichungen tauchen an drei Stellen im Beweis auf. In Schritt 1 taucht die Hölder-Ungleichung auf (siehe Satz B.3.1), welche mit Gleichheit erfüllt ist, sofern es ein $c_1 \geq 0$ gibt, sodass

$$|B_\gamma|^2_{g,g^*}(x)\,\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)| \;=\; c_1^2\,\gamma^2(x)\,|\dot{\gamma}(x)| \quad\Leftrightarrow\quad |B_\gamma|^2_{g,g^*}(x) \;=\; c_1^2 \quad\Leftrightarrow\quad \kappa_{\gamma,1}^2 + \kappa_{\gamma,2}^2 \;=\; c_1^2 \,.$$

Schritt 2 ist überall mit Gleichheit erfüllt, sofern $\kappa_{\gamma,1} \equiv 0$ ist und für alle $x \in \mathcal{I}$ $\dot{\gamma}^1(x) \geq 0$ oder $\dot{\gamma}^1(x) \leq 0$ gilt. Aus den ersten beiden Punkten erhalten wir $\kappa_{\gamma,2} = c_1$. Angenommen es gibt ein $x \in \mathcal{I}$, sodass $\dot{\gamma}^1(x) = 0$ ist, dann impliziert dies $c_1 = 0$ und wegen

$$0 \;\equiv\; \kappa_{\gamma,2} \;\equiv\; \frac{\dot{\gamma}^1}{\gamma^2\,|\dot{\gamma}|}$$

folgt damit $\dot{\gamma}^1 \equiv 0$. In diesem Fall beschreibt γ einen zweidimensionalen Annulus. Die Gleicheit der Abschätzung (3.4) ist für Annuli aufgrund einer trivialen linken und rechten Seite automatisch erfüllt. In dem anderen Fall ist $\dot{\gamma}^1 > 0$ oder $\dot{\gamma}^1 < 0$ auf dem ganzen Intervall $\mathcal{I}$. Wir können eine Umparametrisierung $\psi \colon \tilde{\mathcal{I}} \to \mathcal{I}$ von γ zu seinem Graphen über $\tilde{\mathcal{I}}$ finden, sodass

$$\tilde{\gamma}(x) \;:=\; (\gamma \circ \psi)(x) \;=\; \gamma\big(\psi(x)\big) \;=\; \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}, \qquad u(x) \;:=\; \gamma^2\big(\psi(x)\big) \,.$$

Da die Abschätzung im Satz unabhängig von der Parametrisierung der Profilkurve ist, können wir also von vornherein o. B. d. A annehmen, dass $\gamma = \tilde{\gamma}$. Weiter impliziert die Bedingung $\kappa_{\gamma,1} \equiv 0$ noch, dass $\ddot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}^1\ddot{\gamma}^2$. Mit $\gamma^1(x) = x$ und $\gamma^2(x) = u(x)$ vereinfacht sich diese Bedingung dann zu $u'' \equiv 0$. Dann ist

$$u(x) \;=\; c_2 x + c_3, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad c_1 \;=\; \kappa_{\gamma,2}(x) \;=\; \frac{1}{(c_2 x + c_3)\,\sqrt{1 + c_2^2}} \quad\Rightarrow\quad c_2 \;=\; 0 \,.$$

Somit ist dann $u \equiv c_3$ und die Profilkurve γ beschreibt einen Zylinder. Umgekehrt sieht man mit Beispiel 3.5.1 auch, dass Zylinder die Abschätzung (3.4) mit Gleichheit erfüllen. □

Satz 3.6.1 zeigt insbesondere auch, dass es keine axialsymmetrischen Minimalflächen mit $\dot\gamma(a) = \dot\gamma(b) = 0$ geben kann. Denn für solche gilt

$$\pi^2 \left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2 \leq \mathcal{W}(f_\gamma)\,\mathcal{A}(f_\gamma)\,.$$

Andererseits erfüllen diese auch $H_\gamma \equiv 0$ und somit $\mathcal{W}(f_\gamma) = 0$, sodass die Abschätzung nicht mehr erfüllt sein kann.

3.6.2 Die Funktion $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}$

Für $\lambda > 0$ und $\vartheta, \delta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion (vgl. Bild 3.6)

$$\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}\colon \big\{x \in \mathbb{R} :\, x > \delta\big\} \to \mathbb{R}\,, \qquad \nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(x) \;:=\; x - \vartheta + \frac{\lambda^2}{x-\delta}\,.$$

Die Funktion besitzt ein Minimum bei

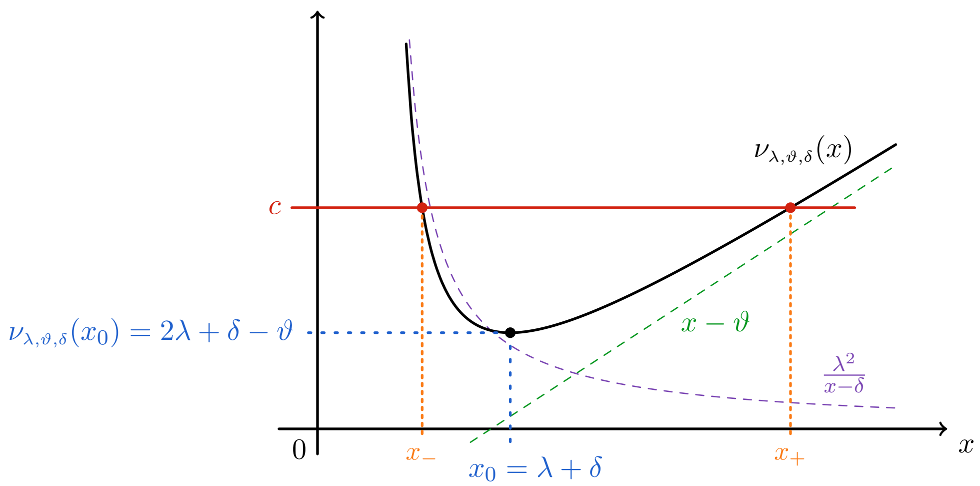


Bild 3.6: Schematische Darstellung der Funktion $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}$ zusammen mit dem eingezeichneten Minimum x_0 sowie den Punkten $x_\pm$ zum Wert c, sodass $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(x_\pm) = c$.

$$x_0 \;=\; \lambda + \delta \qquad \text{mit} \quad \nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(x_0) \;=\; 2\lambda + \delta - \vartheta\,.$$

Auf $(-\delta, x_0]$ ist $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}$ somit streng monoton fallend. Auf $[x_0, \infty)$ dagegen ist die Funktion streng monoton wachsend. Somit besitzt die Gleichung $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(x) = c$ für einen Wert $c > 2\lambda + \delta - \vartheta$ genau zwei Lösungen, welche durch

$$x_\pm \;=\; \frac{1}{2}\left[c + \vartheta + \delta \pm \sqrt{\big(c + \vartheta - \delta\big)^2 - 4\lambda^2}\,\right]$$

gegeben sind. Insbesondere liegen dann die Punkte, welche $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(x) \leq c$ erfüllen, im Intervall $[x_-, x_+]$ und somit vor allem auch $x_- < x_0 < x_+$. ∎

Die Abschätzung aus Satz 3.6.1, kombiniert mit der Funktion $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}$ aus Abschnitt 3.6.2, lässt sich dazu verwenden, Schranken für die Willmore-Energie und die Fläche von Rotationsflächen mit einer oberen Schranke der Helfrich-Energie anzugeben.

3.6.3 Folgerung (Willmore-Abschätzung für Helfrich-Funktional)
Für eine Rotationsfläche $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Helfrich-Energie $\mathcal{H}_\varepsilon(f_\gamma) \le c$ ist die Willmore-Energie nach oben beschränkt durch $\mathcal{W}(f_\gamma) \le M_+$ und nach unten beschränkt durch $\mathcal{W}(f_\gamma) \ge M_-$ mit

$$M_\pm \;=\; \frac{1}{2}\left[c - \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b \pm \sqrt{\left(c + \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b\right)^2 - 4\pi^2\varepsilon\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2}\;\right].$$

Beweis: Mit der Abschätzung aus Satz 3.6.1, umgestellt nach $\mathcal{A}(f_\gamma)$ und eingesetzt in die Definition des Helfrich-Funktionals, ergibt sich

$$c \;\ge\; \mathcal{H}_\varepsilon(f_\gamma) \;=\; \mathcal{W}(f_\gamma) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f_\gamma) \;\overset{3.6.1}{\ge}\; \mathcal{W}(f_\gamma) + \frac{\pi^2\varepsilon\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2}{\mathcal{W}(f_\gamma) + \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b}\,.$$

Die rechte Seite besitzt die Form der Funktion $\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}$ aus Abschnitt 3.6.2 mit $\mathcal{W}(f_\gamma)$ als Argument und den Werten

$$\lambda \;=\; \pi\sqrt{\varepsilon}\,\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|\,, \qquad \vartheta \;=\; 0\,, \qquad \delta \;=\; -\pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b.$$

Die Behauptung erhält man, wenn man

$$\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}\big(\mathcal{W}(f_\gamma)\big) \;\le\; c \qquad\Rightarrow\qquad \mathcal{W}(f_\gamma) \in [x_-, x_+]$$

mit den $x_\pm$ wie in Abschnitt 3.6.2 ausformuliert. □

3.6.4 Folgerung (Flächenabschätzung für Helfrich-Funktional)
Für eine Rotationsfläche $f_\gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Helfrich-Energie $\mathcal{H}_\varepsilon(f_\gamma) \le c$ ist die Fläche nach oben beschränkt durch $\mathcal{A}(f_\gamma) \le N_+$ und nach unten beschränkt durch $\mathcal{A}(f_\gamma) \ge N_-$ mit

$$N_\pm \;=\; \frac{1}{2\varepsilon}\left[c + \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b \pm \sqrt{\left(c + \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b\right)^2 - 4\pi^2\varepsilon\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2}\;\right].$$

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Folgerung 3.6.3. Mit der Abschätzung aus Satz 3.6.1 erhalten wir

$$c \;\ge\; \mathcal{H}_\varepsilon(f_\gamma) \;=\; \mathcal{W}(f_\gamma) + \varepsilon\,\mathcal{A}(f_\gamma) \;\overset{3.6.1}{\ge}\; \varepsilon\,\mathcal{A}(f_\gamma) - \pi\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b + \frac{\pi^2\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|^2}{\mathcal{A}(f_\gamma)}\,,$$

wobei die rechte Seite von der Form $\varepsilon\,\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}(\mathcal{A}(f_\gamma))$ ist mit den Werten

$$\lambda \;=\; \frac{\pi\left|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)\right|}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \qquad \vartheta \;=\; \frac{\pi}{\varepsilon}\left[\frac{\dot\gamma^2}{|\dot\gamma|}\right]_a^b, \qquad \delta \;=\; 0\,.$$

Die Behauptung folgt dann wieder aus

$$\nu_{\lambda,\vartheta,\delta}\big(\mathcal{A}(f_\gamma)\big) \;\le\; \frac{c}{\varepsilon} \qquad\Rightarrow\qquad \mathcal{A}(f_\gamma) \in [x_-, x_+]$$

mit den $x_\pm$ aus Abschnitt 3.6.2. □

3.7. Axialsymmetrische Minimierer des Flächenfunktionals

Im letzten Unterkapitel von Kapitel 3 wollen wir uns mit Minimalflächen in der Klasse der Rotationsflächen auseinandersetzen. Willmore-Flächen lassen sich in der Hinsicht als Verallgemeinerungen von Minimalflächen auffassen, als dass jede Minimalfläche wegen $H \equiv 0$ gleichzeitig eine Willmore-Fläche mit $\mathcal{W} = 0$ ist. Helfrich-Flächen lassen sich dann so gesehen als Interpolation von Willmore- und Minimalflächen verstehen. Zum Verständnis axialsymmetrischer Minimierer des Helfrich-Funktionals, mit denen wir uns in Teil II der Arbeit beschäftigen wollen, ist es aus diesem Grund wichtig, die axialsymmetrischen Minimierer des Flächenfunktionals zu kennen.

Wir wollen hier eine eher informelle Klassifizierung axialsymmetrischer Minimierer des Flächenfunktionals zu symmetrischen Randdaten geben. Das heißt, wir geben ein $\alpha > 0$ vor und suchen Profilkurven $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, mit $\gamma(\pm 1) = \binom{\pm 1}{\alpha}$. Aus später ersichtlichen Gründen wollen wir die Profilkurven im verallgemeinerten Sinne als Elemente der Klasse

$$\mathcal{C}_\alpha := \left\{ \gamma \in C^{0,1}([-1,1], \mathbb{R}^2) : \gamma^2 \geq 0,\ \gamma(\pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{pmatrix},\ \dot{\gamma}(t) \neq 0,\ \text{falls } \dot{\gamma}(t) \text{ existiert} \right\}$$

auffassen. Das Flächenfunktional $\mathcal{A}(\gamma)$ verstehen wir durch Gleichung (3.3) fortgesetzt auf $\mathcal{C}_\alpha$. Demzufolge suchen wir nach Kurven $\gamma \in \mathcal{C}_\alpha$, sodass

$$\mathcal{A}(\gamma) = \inf_{\eta \in \mathcal{C}_\alpha} \mathcal{A}(\eta) .$$

Es stellt sich heraus, dass wir zwei Fälle von axialsymmetrischen Minimierern des Flächenfunktionals unterscheiden müssen. Für einen Beweis sei auf [*Giaquinta und Hildebrandt, 1996*, Chapter 8, Section 4.3, Theorem 1] oder [*Oprea, 2000*, Theorem 3.2.5] verwiesen.

3.7.1 Katenoide als Minimalflächen

Im ersten Fall ist die Profilkurve als Graph gegeben. Es lässt sich dann zeigen (siehe auch [*Dacorogna, 2009*, Proposition 5.11], dass die Minimalflächengleichung

$$0 \equiv \frac{1}{u\sqrt{1+u'^2}} - \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$

aus Abschnitt 3.4.1 nur von Katenoiden der Form

$$u_{c,d}(x) = c \cosh\left(\frac{x+d}{c}\right)$$

für ein $c > 0$ und ein $d \in \mathbb{R}$ erfüllt wird. Die symmetrischen Randbedingungen in der Definition von $\mathcal{C}_\alpha$ implizieren hier dann $d = 0$, sodass die gesuchten axialsymmetrischen Minimalflächen in diesem Fall stets von der Form (vgl. auch mit Beispiel 3.5.2)

$$u_c(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

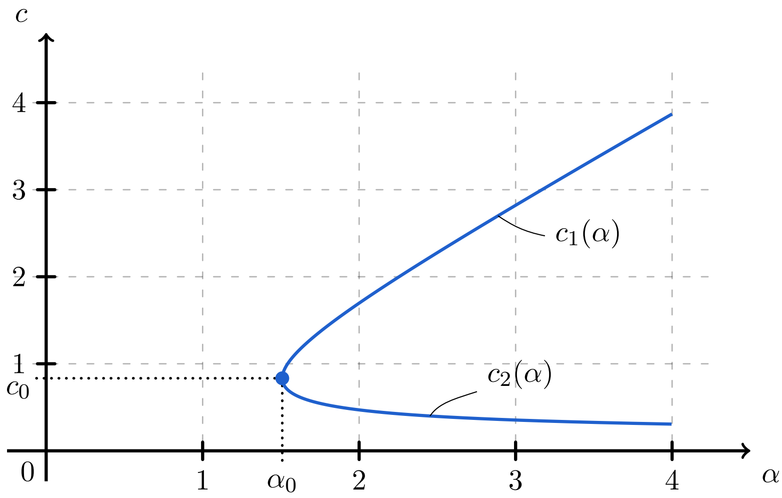


Bild 3.7: Zusammenhang zwischen dem Randwert α und dem Katenoid-Parameter c.

für ein $c > 0$ sind. Zum Randwert $\alpha > 0$ muss $c > 0$ so gewählt sein, dass $\alpha = c \cosh\left(\frac{1}{c}\right)$ erfüllt ist. In Bild 3.7 ist der Zusammenhang zwischen α und c dargestellt. Zu erkennen ist, dass es einen Bereich von Randwerten gibt, für den kein Katenoid existiert. Der geringste Randwert, an dem ein Katenoid existiert, ist durch $\alpha_0 \approx 1.50888$ mit Parameter $c_0 \approx 0.83356$ gegeben. Zu diesem Randwert existiert genau ein Katenoid, wohingegen es für $\alpha > \alpha_0$ genau zwei Äste von Parametern $c_1(\alpha)$, $c_2(\alpha)$ und damit genau zwei Katenoide gibt. Bild 3.8 zeigt ein Beispiel für

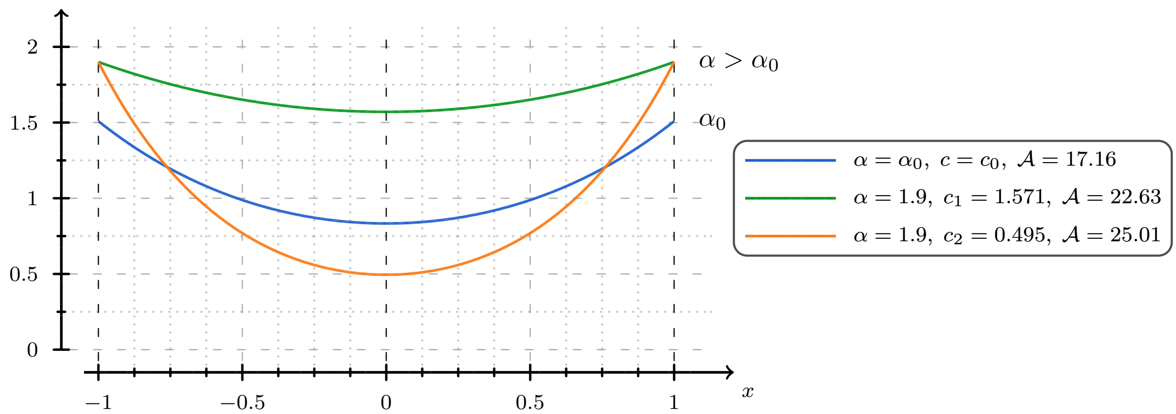


Bild 3.8: Darstellung dreier Katenoide zu den Randwerten $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = 1.9$. Die Werte der Katenoid-Parameter c der drei Katenoide wurden numerisch ermittelt.

diese Situationen. Nach Beispiel 3.5.2 ist die Fläche eines Katenoids durch

$$\mathcal{A}(u_c) \;=\; 2\pi c + \pi c^2 \sinh\left(\frac{2}{c}\right)$$

gegeben, sodass der Zweig $c_1(\alpha)$ stets kleinere Flächenwerte besitzt. Katenoide vom Zweig $c_1(\alpha)$ wollen wir deshalb auch als **flächenminimierende Katenoide** bezeichnen. Am kleinsten Randwert α_0 besitzt das Katenoid die Fläche $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}(u_{c_1(\alpha_0)}) = \mathcal{A}(u_{c_2(\alpha_0)}) \approx 17.16$. ■

3.7.2 Goldschmidt-Kurven als Minimalflächen

Der zweite Fall axialsymmetrischer Minimierer des Flächenfunktionals betrifft Randwerte, welche unterhalb von α_0 liegen. Für einen solchen Randwert $\alpha < \alpha_0$ lässt sich die Profilkurve des entsprechenden Minimierers des Flächenfunktionals nicht mehr als Graph darstellen. Vielmehr wird diese durch eine beliebige Parametrisierung des Polygonzugs (siehe Bild 3.9 (links))

$$\gamma_\alpha := \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben, welche auch **Goldschmidt-Kurve** genannt wird. Als geometrisches Objekt kor-

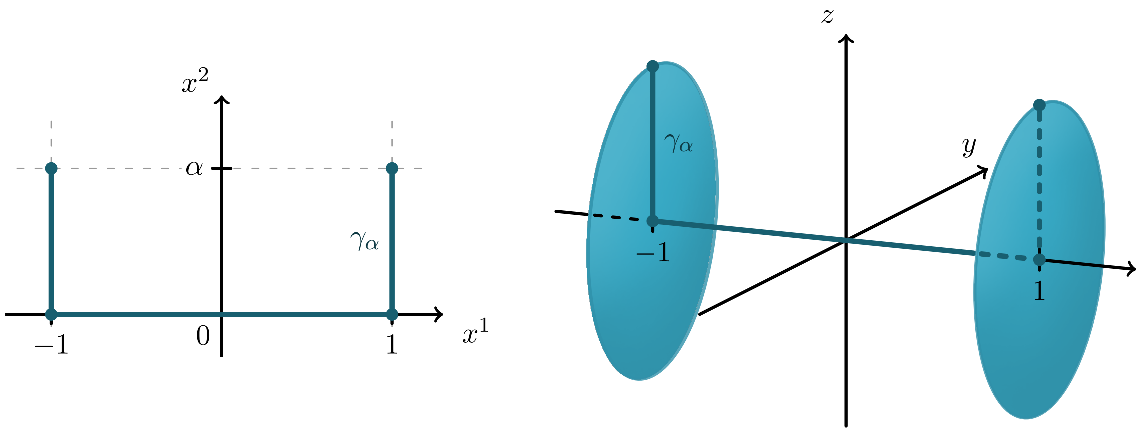


Bild 3.9: Veranschaulichung einer Goldschmidt-Kurve γ_α. (Links) Als Profilkurve γ_α in $\mathbb{R}^2$. (Rechts) Geometrische Veranschaulichung als Rotationsfläche bestehend aus zwei flachen Kreisen.

respondiert die zur Goldschmidt-Kurve entsprechende Rotationsfläche zu den beiden flachen Kreisscheiben, welche von den Randkreisen mit Radius α eingespannt werden (siehe Bild 3.9 (rechts)). Man rechnet auch nach, dass die Fläche der Goldschmidt-Kurve zum Randwert α durch $\mathcal{A}(\gamma_\alpha) = 2\pi\alpha^2$ gegeben ist, im Einklang mit der geometrischen Veranschaulichung. ■

Das heißt also, Minimierer des Flächenfunktionals können nur in jeweils einen der beiden beschriebenen Falle des flächenminimierenden Katenoids aus Abschnitt 3.7.1 und der Goldschmidt-Kurve aus Abschnitt 3.7.2 fallen. Bild 3.10 vergleicht die Flächenwerte beider Fälle in Abhängigkeit des Randdatums α. Für große Werte von α wird stets das flächenminimierende Katenoid der Minimierer des Flächenfunktionals sein. Wählt man α kleiner, so erreicht man irgendwann den Randwert $\alpha_m \approx 1.895$, an dem die Flächen des flächenminimierenden Katenoids und der Goldschmidt-Kurve übereinstimmen. Der dazugehörige Flächenwert ist $\mathcal{A}_m := \mathcal{A}(u_{c_1(\alpha_m)}) = \mathcal{A}(\gamma_{\alpha_m}) \approx 22.564$. Für $\alpha < \alpha_m$ werden Goldschmidt-Kurven zu eindeutigen Minimierern des Flächenfunktionals. Katenoide werden dann zunächst nur zu relativen Minimierern, bis sie für $\alpha < \alpha_0$ nicht mehr existieren (vgl. auch mit [*Giaquinta und Hildebrandt, 1996*, Chapter 8, Section 4.3, Theorem 2]).

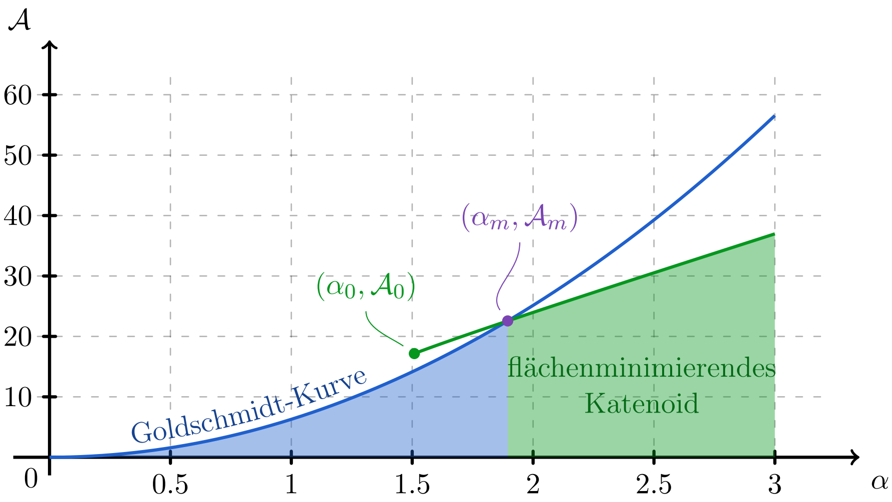


Bild 3.10: Darstellung der Flächenwerte der Goldschmidt-Kurven und der flächenminimierenden Katenoide für verschiedene Randwerte α. Für $\alpha < \alpha_m$ sind Goldschmidt-Kurven die eindeutigen Minimierer des Flächenfunktionals, für $\alpha > \alpha_m$ sind es dagegen die flächenminimierenden Katenoide und bei $\alpha = \alpha_m$ beide Fälle. Die Flächenwerte für die flächenminimierenden Katenoide wurden über die entsprechend numerisch bestimmten Katenoid-Parameter ermittelt.

Das Verhalten der Minimierer des Flächenfunktionals, insbesondere der Übergang zwischen qualitativ verschiedenen Minimierern, lässt sich auch beim Helfrich-Funktional wiederfinden. Ein ähnliches Verhalten wird später in Kapitel 6.3 beschrieben.

Teil II.

Existenz und Eigenschaften axialsymmetrischer Minimierer des Helfrich-Funktionals

4. Existenzkriterium und Regularität von Helfrich-Minimierern

Die in Teil I, speziell in Kapitel 3, gelegten geometrischen Grundlagen zur Beschreibung axialsymmetrischer Helfrich-Flächen wollen wir hier nun der Analysis zugänglich machen. Ziel wird es sein, ein Dirichlet-Problem für die Helfrich-Gleichung aufzustellen und Lösungen dessen zu finden. Besonders interessant werden Minimierer des Helfrich-Funktionals als Beispiele von Lösungen der Helfrich-Gleichung sein. Als Strategie zum Finden von Minimierern wollen wir die *direkte Methode der Variationsrechnung* verwenden. Um diese anwenden zu können, müssen wir das Helfrich-Funktional auf geeignete Funktionenklassen für die Profilkurven fortsetzen.

In Kapitel 4.1 werden wir das für diese Arbeit relevante Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung formulieren und das Helfrich-Funktional auf geeignete Teilmengen von $H^2(-1,1)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung besitzt gewisse Stetigkeits- und Differenzierbarkeits-Eigenschaften, welche in Kapitel 4.2 besprochen werden. Mit den Differenzierbarkeits-Eigenschaften sind Minimierer *schwache Lösungen* der Helfrich-Gleichung. Das Regularitätsresultat aus Kapitel 4.3 zeigt, dass diese sogar glatt sind und damit klassische Lösungen der Helfrich-Gleichung. Letztendlich werden wir dann in Kapitel 4.4 eine hinreichende Bedingung für die Anwendung der direkten Methode angeben, welche die Existenz von Helfrich-Minimierern impliziert. Für die funktionalanalytischen Grundlagen und Resultate sei auf Anhang B hingewiesen.

4.1. Problemstellung

Wir formulieren hier zunächst die Problemstellung, mit der wir uns in Teil II dieser Arbeit auseinandersetzen werden. Dazu adaptieren wir die Notation aus Kapitel 3. Weiter werden wir das Helfrich-Funktional und die anderen geometrischen Größen auf den für die Variationsrechnung geeigneten Funktionenraum H^2 fortsetzen und unser Vorgehen beschreiben, wie wir Minimierer des Helfrich-Funktionals und damit Lösungen der Helfrich-Gleichung finden wollen.

Als Problem betrachten wir für ein $\varepsilon > 0$ das Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung

$$(\mathrm{HG}_{u,\alpha}) \qquad \begin{cases} \Delta_{g_u} H_u + 2H_u\,(H_u^2 - K_u) - 2\varepsilon H_u \,=\, 0 \qquad \text{auf } (-1,1)\,, \\ \qquad\qquad u(\pm 1) = \alpha\,, \quad u'(\pm 1) \,=\, 0 \end{cases}$$

für graphische Rotationsflächen mit Profilkurven $u \in C^4([-1,1])$, wobei $\alpha > 0$ (vgl. mit Satz 3.2.3 und Abschnitt 3.2.4). Mit der Symmetrie der Randbedingungen wollen wir die Suche nach Lösungen von $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$ weiter noch auf gerade Funktionen einschränken, d. h. auf Profilkurven u mit $u(x) = u(-x)$.

Im Speziellen suchen wir mit der *direkten Methode der Variationsrechnung* nach Minimierern des Helfrich-Funktionals $\mathcal{H}_\varepsilon(f_u)$ in der vorgegebenen Klasse als Lösungen der Helfrich-Gleichung

($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$). Für den Erfolg dieser Methode bedarf es der *lokalen schwachen Folgenkompaktheit reflexiver Banachräume* (siehe auch Kapitel B.2 im Anhang). Das heißt, C^4-Glattheit der Profilkurve für die Helfrich-Gleichung bzw. C^2-Glattheit für den Definitionsbereich des Helfrich-Funktionals wird der falsche Kontext für die Anwendung der direkten Methode sein. Stattdessen bietet es sich an, im Kontext von Sobolev-Räumen wie beispielsweise H^2 (siehe auch Kapitel B.3 im Anhang) zu arbeiten.

Für unsere Zwecke wollen wir das Helfrich-Funktional auf die Menge

$$H_+ := \left\{u \in H^2(-1,1) : \ u > 0\right\}$$

fortsetzen. Minimieren werden wir das so fortgesetzte Helfrich-Funktional dann in Klassen vorgegebener Dirichlet-Randwerte. Weiterhin schränken wir uns noch auf gerade Funktionen ein und definieren dazu

$$H_\alpha := \left\{u \in H^2(-1,1) : \ u \text{ ist gerade}, \ u > 0, \ u(\pm 1) = \alpha, \ u'(\pm 1) = 0\right\},$$

wobei wir die punktweisen Eigenschaften der H^2-Funktionen aus H_α durch die stetige Einbettung $H^2(-1,1) \hookrightarrow C^1([-1,1])$ verstehen (vgl. Satz B.3.6).

Da die in Kapitel 3 betrachteten Funktionale alleine durch die Angabe einer Profilkurve bestimmt werden, wollen wir uns hier von der rein geometrischen Beschreibung lösen, um diese für „Profilkurven“ aus H_+ fortzusetzen. Die Fortsetzung des Helfrich-Funktionals auf H_+ ermöglicht uns die Anwendung der direkten Methode zum Finden eines Minimierers. Anlehnend an Kapitel 3.2 und 3.4 definieren wir für $u \in H_+$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u) &:= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \ \mathrm{d}x + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \kappa_u(x)^2 \ \mathrm{d}S_u(x) - \pi \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right]_{-1}^{1} \end{aligned}$$

mit

$$\kappa_u(x) := -\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}, \qquad \mathrm{d}S_u(x) := u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} \ \mathrm{d}x$$

sowie

$$\mathcal{A}(u) := 2\pi \int_{-1}^{1} u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} \ \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}S_u(x)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(u) &:= \mathcal{W}(u) + \varepsilon\, \mathcal{A}(u) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} + 4\varepsilon\, u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} \right) \mathrm{d}x \\ &\qquad + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \kappa_u(x)^2 \ \mathrm{d}S_u(x) - \pi \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right]_{-1}^{1}. \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit dieser Funktionale folgt aus:

4.1.1 Hilfssatz (Wohldefiniertheit)
Für $\varepsilon \geq 0$ sind die Funktionale $\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{H}_\varepsilon \colon H_+ \to \mathbb{R}_+$ wohldefiniert, d. h., für $u \in H_+$ gelten

$$\mathcal{W}(u) < \infty\,, \qquad \mathcal{A}(u) < \infty \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}_\varepsilon(u) < \infty\,.$$

Beweis: Mit der Einbettung $H^2(-1,1) \hookrightarrow C^1([-1,1])$ lässt sich $u \in H_+$ als stetig differenzierbar auffassen. Als stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[-1,1]$ sind u und u' damit automatisch nach oben und unten beschränkt. Damit ist auch $x \mapsto u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}$ nach oben und unten beschränkt. $\mathcal{A}(u)$ ist somit wohldefiniert und für die Wohldefiniertheit von $\mathcal{W}$ bleibt lediglich die Integrierbarkeit von $\kappa_u(x)^2$ zu untersuchen. Wir rechnen

$$\int_{-1}^{1} \kappa_u(x)^2 \,\mathrm{d}S_u(x) = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x \leq C \int_{-1}^{1} u''(x)^2 \,\mathrm{d}x \leq C\,\|u''\|_{L^2}^2 \leq C\,\|u\|_{H^2}^2\,.$$

Somit ist dann $\mathcal{W}$ wohldefiniert und damit letztendlich auch $\mathcal{H}_\varepsilon$. □

Die Definitionen der Funktionale lassen sich in dem Sinne als Fortsetzung der ursprünglichen Definitionen aus Kapitel 3 auffassen, dass für $u \in C^2([-1,1]) \cap H_+$ offensichtlich $\mathcal{W}(u) = \mathcal{W}(f_u)$, $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(f_u)$ und $\mathcal{H}_\varepsilon(u) = \mathcal{H}_\varepsilon(f_u)$ gelten.

Im Verlauf der Arbeit werden wir folgende Strategie verfolgen:

4.1.2 Anleitung zum Lösen von ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) mittels Minimierung von $\boldsymbol{\mathcal{H}_\varepsilon}$ in $\boldsymbol{H_\alpha}$
Für die Anwendung der direkten Methode in Kapitel 4.4 verwenden wir die lokale schwache Folgenkompaktheit von $H^2(-1,1)$ und die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ bezüglich der H^2-Topologie, welche wir in Kapitel 4.2 zeigen. Nach Wahl einer geeigneten Minimalfolge für das Infimum

$$M_\alpha^\varepsilon := \inf\left\{\mathcal{H}_\varepsilon(u) : \, u \in H_\alpha\right\} \geq 0$$

erhalten wir einen Minimierer u des Helfrich-Funktionals in der Klasse H_α, sodass $\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon$. Als Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α löst u sogar die *schwache Helfrich-Gleichung.* Die Regularitätstheorie aus Kapitel 4.3 zeigt dann, dass u glatt ist. Somit lässt sich u wieder als Profilkurve einer Rotationsfläche im Sinne von Kapitel 3 interpretieren. Da die Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{H}_\varepsilon$ bezüglich glatter Funktionen mit der ersten Variation des Helfrich-Funktionals bezüglich der in Abschnitt 3.4.4 beschriebenen Variationen übereinstimmt, ist die schwache Helfrich-Gleichung als Verschwinden der ersten Variation zu deuten. Das heißt also insbesondere, dass u demnach eine klassische Lösung der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) ist.

Das wirkliche Problem der Variationsrechnung zur Bestimmung eines Helfrich-Minimierers liegt dann letztendlich in der Möglichkeit, die H^2-Beschränktheit einer Minimalfolge für M_α^ε zu zeigen. In Kapitel 4.4 formulieren wir deshalb zunächst einmal ein hinreichendes Kriterium für die Anwendbarkeit der direkten Methode. Kapitel 5 setzt sich dann mit Bereichen von Parametern α und ε auseinander, für die dieses Kriterium erfüllt ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Resultate der folgenden Unterkapitel, sofern nicht anders vorausgesetzt wird, auch für $\varepsilon = 0$ und somit für das Willmore-Funktional $\mathcal{W} = \mathcal{H}_0$ gelten. ■

4.2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit des Helfrich-Funktionals

Die in Kapitel 4.1 beschriebene Fortsetzung des Helfrich-Funktionals auf H_+ besitzt die gewünschten Stetigkeits- und Differenzierbarkeits-Eigenschaften. Zunächst zeigen wir die für die direkte Methode notwendige Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ bezüglich der schwachen H^2-Topologie.

4.2.1 Satz (Schwache Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_+)
Für alle $\varepsilon \geq 0$ ist $\mathcal{H}_\varepsilon \colon H_+ \to \mathbb{R}$ ein schwach folgenunterhalbstetiges Funktional bezüglich der H^2-Topologie, das heißt, für alle schwach konvergenten Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_+$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1,1)$ für ein $u \in H_+$ gilt

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k)\,.$$

Beweis: Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_+$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1,1)$ und $u \in H_+$. Es reicht die Folgenunterhalbstetigkeit dann für eine Teilfolge $(u_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu verifizieren, um die Behauptung zu beweisen. Wäre dies nicht so, so gäbe es eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) > \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k)$. Die Auswahl einer passenden Teilfolge würde dann den Widerspruch liefern.

Wegen der Kompaktheit der Einbettungen $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(-1,1)$ (siehe Satz B.3.5) und $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^1([-1,1])$ (siehe Satz B.3.6) erreichen wir nach Auswahl einer Teilfolge, dass

$$u_k \to u \text{ in } H^1(-1,1) \qquad \text{und} \qquad u_k \to u \text{ in } C^1([-1,1])\,.$$

Insbesondere können wir annehmen, dass $\|u_k\|_{C^0}$, $\|u_k'\|_{L^2}$ und $\left\|\frac{1}{uu_k}\right\|_{C^0}$ durch eine Konstante beschränkt sind, welche unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist.

Für

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon(u) = {} & \underbrace{2\pi\varepsilon \int_{-1}^{1} u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,\mathrm{d}x}_{①} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}\,\mathrm{d}x}_{②} \\ & + \underbrace{\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x}_{③} \underbrace{-\pi\left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right]_{-1}^{1}}_{④}\end{aligned}$$

untersuchen wir die schwachen Folgenunterhalbstetigkeit der einzelnen vier Terme:

Term 1: Schwache Folgenstetigkeit des Flächenfunktionals.

Der erste Term entspricht bis auf einem konstanten Vorfaktor dem Flächenfunktional $\mathcal{A}$. Wir rechnen

$$\left| \int_{-1}^{1} u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}\,\mathrm{d}x \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{-1}^{1} \left| u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} - u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2} \right| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-1}^{1} \left| \big(u(x)-u_k(x)\big)\sqrt{1+u'(x)^2} \right| \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} u_k(x) \left| \sqrt{1+u'(x)^2} - \sqrt{1+u_k'(x)^2} \right| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \left\| u-u_k \right\|_{L^2} \underbrace{\left\| \sqrt{1+u'^2} \right\|_{L^2}}_{=\sqrt{2+\|u'\|_{L^2}^2}\,\leq C} + \underbrace{\|u_k\|_{C^0}}_{\leq C} \int_{-1}^{1} \left| u'^2 - {u_k'}^2 \right| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}+\sqrt{1+{u_k'}^2}}}_{\leq \frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x \\
&\leq C \Big(\left\| u-u_k \right\|_{L^2} + \left\| u'-u_k' \right\|_{L^2} \underbrace{\left\| u'+u_k' \right\|_{L^2}}_{\leq C} \Big) \\
&\leq C \left\| u-u_k \right\|_{H^1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist das Flächenfunktional schwach folgenstetig und somit insbesondere auch schwach folgenunterhalbstetig.

Term 2: Schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Willmore-Funktionals I.

Analog zu Term 1 zeigen wir hier auch sogar die schwache Folgenstetigkeit des Terms. Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{1}{u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}} \,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad\leq \underbrace{\left\| \frac{1}{u\,u_k} \right\|_{C^0}}_{\leq C} \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}\,\sqrt{1+u_k'(x)^2}}}_{\leq 1} \left| u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} - u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2} \right| \,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq C \int_{-1}^{1} \left| u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} - u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2} \right| \,\mathrm{d}x \\
&\quad\overset{\text{Term 1}}{\leq} C \left\| u-u_k \right\|_{H^1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

Mit der schwachen Folgenstetigkeit ist der Term dann ebenso schwach folgenunterhalbstetig.

Term 3: Schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Willmore-Funktionals II.

Als Zwischenbehauptung zeigen wir zunächst einmal, dass

$$
\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{\big(1+u'(x)^2\big)^{5/2}} \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u_k''(x)^2}{\big(1+u'(x)^2\big)^{5/2}} \,\mathrm{d}x\,. \tag{4.1}
$$

Dazu beobachten wir, dass für ein $h \in L^\infty(-1,1)$ mit $h \geq 0$ f. ü. gilt, dass

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{-1}^{1} h(x)\big(u''(x)-u_k''(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)\,u_k''(x) \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} h(x)\,u_k''(x)^2 \,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
$$

also

$$2\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)\,u_k''(x)\;\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)^2\;\mathrm{d}x \;\le\; \int_{-1}^{1} h(x)\,u_k''(x)^2\;\mathrm{d}x$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $v \mapsto \int_{-1}^{1} hu''v''\;\mathrm{d}x$ definiert ein lineares und stetiges Funktional auf $H^2(-1,1)$, denn

$$\left|\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)\,v''(x)\;\mathrm{d}x\right| \;\le\; \|h\|_{L^\infty}\|u''\|_{L^2}\,\|v''\|_{L^2} \;\le\; \underbrace{\|h\|_{L^\infty}\|u\|_{H^2}}_{=C}\,\|v\|_{H^2}\,.$$

Somit gilt wegen $u_k \rightharpoonup u$ in $H^2(-1,1)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)\,u_k''(x)\;\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)^2\;\mathrm{d}x$$

und damit rechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)^2\;\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty} 2\int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)\,u_k''(x)\;\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} h(x)\,u''(x)^2\;\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} h(x)\,u_k''(x)^2\;\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Mit der Wahl $0 < h = \frac{u}{(1+u'^2)^{5/2}} \in L^\infty(-1,1)$ folgt die Zwischenbehauptung aus Gleichung (4.1).

Weiter zeigen wir

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x \;=\; \liminf_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{u_k(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u_k'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x\,. \tag{4.2}$$

Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u_k(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u_k'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x\right|\\
&\quad\le \int_{-1}^{1} u_k''(x)^2\left|\frac{u(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}} - \frac{u_k(x)}{\left(1+u_k'(x)^2\right)^{5/2}}\right|\;\mathrm{d}x\\
&\quad\le \underbrace{\left\|u_k''^2\right\|_{L^1}}_{\substack{=\|u_k''\|_{L^2}^2\\ \le\|u_k\|_{H^2}^2\le C}}\left\|\frac{u}{\left(1+u'^2\right)^{5/2}} - \frac{u_k}{\left(1+u_k'^2\right)^{5/2}}\right\|_{L^\infty}\\
&\quad\le C\left\|\frac{u\left(1+u_k'^2\right)^{5/2} - u_k\left(1+u'^2\right)^{5/2}}{\left(1+u'^2\right)^{5/2}\left(1+u_k'^2\right)^{5/2}}\right\|_{L^\infty}\\
&\quad\le C\left\|u\left(1+u_k'^2\right)^{5/2} - u_k\left(1+u'^2\right)^{5/2}\right\|_{L^\infty}\\
&\quad\le C\left\|(u-u_k)\left(1+u'^2\right)^{5/2} + u\left(\left(1+u_k'^2\right)^{5/2} - \left(1+u'^2\right)^{5/2}\right)\right\|_{L^\infty}\\
&\quad\le C\left(\underbrace{\left\|\left(1+u'^2\right)^{5/2}\right\|_{L^\infty}}_{\le C}\|u-u_k\|_{L^\infty} + \underbrace{\|u\|_{L^\infty}}_{\le C}\left\|\left(1+u_k'^2\right)^{5/2} - \left(1+u'^2\right)^{5/2}\right\|_{L^\infty}\right)\end{aligned}$$

$$\leq C\left(\|u-u_k\|_{C^1} + \left\|\left(1+u_k'^2\right)^{5/2} - \left(1+u'^2\right)^{5/2}\right\|_{C^0}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

sodass Gleichung (4.2) folgt.

Gleichungen (4.1) und (4.2) zusammengefasst ergeben

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x \;=\; \liminf_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u_k(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u_k'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x\,,$$

also die schwache Folgenunterhalbstetigkeit des dritten Terms.

Term 4: Schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Willmore-Funktionals III.

Der letzte Term ist ebenso wie die ersten beiden Terme schwach folgenstetig in $H^2(-1,1)$. Das folgt unmittelbar aus $u_k \to u$ in $C^1([-1,1])$ und somit $u_k(\pm 1) \to u(\pm 1)$. □

Der Beweis der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in Satz 4.2.1 hat gezeigt, dass die Terme 1, 2 und 4 sogar schwach folgenstetig sind. Für den dritten Term lässt sich allerdings nur die Stetigkeit in der H^2-Normtopologie zeigen, welche $\mathcal{H}_\varepsilon$ zu einem stetigen Funktional in H_+ macht.

4.2.2 Satz (Stetigkeit von $\boldsymbol{\mathcal{H}_\varepsilon}$ in $\boldsymbol{H_+}$)
Für alle $\varepsilon \geq 0$ ist $\mathcal{H}_\varepsilon$ stetig in der H^2-Topologie, d. h., für alle konvergenten Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_+$ mit $u_k \to u \in H^2(-1,1)$ für ein $u \in H_+$ gilt

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) \;=\; \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k)\,.$$

Beweis: Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_+$ mit $u_k \to u \in H^2(-1,1)$ und $u \in H_+$. Wir argumentieren hier wie im Beweis von Satz 4.2.1, sodass es reicht, die Stetigkeit für eine Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu verifizieren. Weiter haben wir in dem Beweis gesehen, dass die dort bezeichneten Terme 1, 2 und 4 sogar schwach folgenstetig sind und damit insbesondere auch stetig in der H^2-Normtopologie. Es bleibt als nur Term 3 auf Stetigkeit zu überprüfen.

Term 3: Stetigkeit des Willmore-Funktionals.

Zum Nachweis der Stetigkeit von

$$u \;\mapsto\; \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

nutzen wir wieder die Kompaktheit der Einbettungen $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(-1,1)$ und $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^1([-1,1])$, um nach Auswahl einer Teilfolge

$$u_k \to u \text{ in } H^1(-1,1) \qquad \text{und} \qquad u_k \to u \text{ in } C^1([-1,1])$$

zu erreichen. Weiter nehmen wir wieder $\|u_k\|_{C^0}$ und $\|u_k'\|_{L^2}$ als durch eine feste Konstante beschränkt an, welche unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist. Wir rechnen zunächst

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u_k''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \underbrace{\left\| \frac{u}{(1+u'^2)^{5/2}} \right\|_{L^\infty}}_{\leq C} \int_{-1}^{1} \left| u''(x)^2 - u_k''(x)^2 \right| \,\mathrm{d}x$$

$$\leq C \left[\underbrace{\int_{-1}^{1} \left| u''(x) - u_k''(x) \right|^2 \,\mathrm{d}x}_{\leq \|u-u_k\|_{H^2}^2 \to 0} + 2 \underbrace{\left| \int_{-1}^{1} u''(x)\, u_k''(x) \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} u''(x)^2 \,\mathrm{d}x \right|}_{\to 0} \right] \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Die Konvergenz des letzten Terms folgt aus der Stetigkeit des linearen Funktionals $v \mapsto \int_{-1}^{1} u''v'' \,\mathrm{d}x$ auf $H^2(-1,1)$. Somit haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\, u_k''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\, u''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x\,.$$

Im Beweis von Satz 4.2.1 hatten wir außerdem schon gezeigt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u_k(x)\, u_k''(x)^2}{(1+u_k'(x)^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\, u_k''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x\,,$$

sodass wir letztendlich die Stetigkeit von (4.3) erhalten. □

Um zeigen zu können, dass Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α auch klassische Lösungen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) sind, muss man auf die *schwache Formulierung* dieser zurückgreifen. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\mathcal{H}_\varepsilon$ Gâteaux-differenzierbar ist.

4.2.3 Satz (Gâteaux-Differenzierbarkeit von $\boldsymbol{\mathcal{H}_\varepsilon}$)
Für $\varepsilon \geq 0$ ist das Helfrich-Funktional $\mathcal{H}_\varepsilon$ Gâteaux-differenzierbar in H_+ und für $u \in H_+$ sowie $\varphi \in H^2(-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{d}_G\mathcal{H}_\varepsilon(u)\,,\, \varphi \right\rangle = \frac{\pi}{2} \Bigg[& 2\int_{-1}^{1} \frac{uu''\varphi''}{(1+u'^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x - 5\int_{-1}^{1} \frac{uu'u''^2\varphi'}{(1+u'^2)^{7/2}} \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x \\
& + \int_{-1}^{1} \frac{u''^2\varphi}{(1+u'^2)^{5/2}} \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\sqrt{1+u'^2}} \,\mathrm{d}x - 2\left[\frac{\varphi'}{(1+u'^2)^{3/2}} \right]_{-1}^{1} \Bigg] \\
& + 2\pi\varepsilon \left[\int_{-1}^{1} \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}} \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \varphi\sqrt{1+u'^2} \,\mathrm{d}x \right].
\end{aligned}$$

Beweis: Die Gâteaux-Ableitung ist definiert durch (vgl. Definition B.2.3)

$$\left\langle \mathrm{d}_G\mathcal{H}_\varepsilon(u)\,,\, \varphi \right\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{H}_\varepsilon(u+t\varphi)\Big|_{t=0}$$

für $u \in H_+$, $\varphi \in H^2(-1,1)$ und $t \in (-\delta,\delta)$ für ein hinreichend kleines δ, sodass $u + t\varphi \in H_+$. Zwecks Übersichtlichkeit bezeichnen wir $u_t := u + t\varphi$. Wir untersuchen separat die Gâteaux-Differenzierbarkeit des Flächen- und des Willmore-Funktionals. Es sei angemerkt, dass wir hier wieder durchgehend die Einbettung $H^2(-1,1) \hookrightarrow C^1([-1,1])$ verwenden werden, nach der

$u, u' \in C^0([-1,1])$ Minimum und Maximum annehmen und somit insbesondere beschränkt sind.

Schritt 1: Flächenfunktional ist Gâteaux-differenzierbar.

Für das Flächenfunktional

$$\mathcal{A}(u) \;=\; 2\pi \int_{-1}^{1} u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x$$

ist das Gâteaux-Differential gegeben durch

$$\begin{aligned}
\big\langle\, \mathrm{d}_G\mathcal{A}(u)\,,\,\varphi \big\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2\pi \int_{-1}^{1} u_t(x)\,\sqrt{1+u_t'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x\right]_{t=0} \\
&= 2\pi\left[\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u'(x)\,\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\;\,\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\Big|\big\langle\, \mathrm{d}_G\mathcal{A}(u)\,,\,\varphi \big\rangle\Big| &\leq C\left[\left|\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u'(x)\,\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\;\,\mathrm{d}x\right|\right] \\
&\leq C\left[\underbrace{\left\|\sqrt{1+u'^2}\,\right\|_{L^2}}_{\leq C}\,\|\varphi\|_{L^2} + \underbrace{\left\|\frac{uu'}{\sqrt{1+u'^2}}\right\|_{L^2}}_{\leq C}\,\|\varphi'\|_{L^2}\right] \\
&\leq C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.
\end{aligned}$$

Somit ist das Flächenfunktional also Gâteaux-differenzierbar.

Schritt 2: Willmore-Funktional ist Gâteaux-differenzierbar.

Für das Willmore-Funktional

$$\mathcal{W}(u) \;=\; \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\;\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,u''(x)^2}{\left(1+u'(x)^2\right)^{5/2}}\;\,\mathrm{d}x - \pi\left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right]_{-1}^{1}$$

ist das Gâteaux-Differential gegeben durch

$$\begin{aligned}
\big\langle\, \mathrm{d}_G\mathcal{W}(u)\,,\,\varphi \big\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{u_t(x)\,\sqrt{1+u_t'(x)^2}}\;\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{u_t(x)\,u_t''(x)^2}{\left(1+u_t'(x)^2\right)^{5/2}}\;\,\mathrm{d}x \right.\\
&\qquad\qquad\left. - \pi\left[\frac{u_t'}{\sqrt{1+u_t'^2}}\right]_{-1}^{1}\right]_{t=0} \\
&= \frac{\pi}{2}\Bigg[-\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\,\sqrt{1+u'^2}}\;\,\mathrm{d}x}_{①} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\,\left(1+u'^2\right)^{3/2}}\;\,\mathrm{d}x}_{②} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{u''^2\varphi}{\left(1+u'^2\right)^{5/2}}\;\,\mathrm{d}x}_{③}
\end{aligned}$$

$$+\,2\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{uu''\varphi''}{(1+u'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x}_{④}-5\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{uu'u''^2\varphi'}{(1+u'^2)^{7/2}}\,\mathrm{d}x}_{⑤}-2\underbrace{\left[\frac{\varphi'}{(1+u'^2)^{3/2}}\right]_{-1}^{1}}_{⑥}\Bigg].$$

Für Gâteaux-Differenzierbarkeit müssen wir

$$\left|\left\langle\,\mathrm{d}_G\mathcal{W}(u)\,,\,\varphi\right\rangle\right|\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}$$

prüfen. Dazu untersuchen wir die einzelnen Terme auf Stetigkeit:

Term 1:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi}{u^2\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{1}{u^2\sqrt{1+u'^2}}\right\|_{L^2}}_{\le 2\left\|\frac{1}{u^2}\right\|_{C^0}\le C}\|\varphi\|_{L^2}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Term 2:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{u'\varphi'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{u'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}}\right\|_{L^2}}_{\le 2\left\|\frac{u'}{u}\right\|_{C^0}\le C}\|\varphi'\|_{L^2}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Term 3:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{u''^2\varphi}{(1+u'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{1}{(1+u'^2)^{5/2}}\right\|_{C^0}}_{\le 1}\underbrace{\|u''\|_{L^2}}_{\le\|u\|_{H^2}}\;\underbrace{\|\varphi\|_{C^0}}_{\le C\,\|\varphi\|_{H^2}}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Term 4:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{uu''\varphi''}{(1+u'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{u}{(1+u'^2)^{5/2}}\right\|_{C^0}}_{\le\|u\|_{C^0}}\underbrace{\|u''\|_{L^2}}_{\le\|u\|_{H^2}}\|\varphi''\|_{L^2}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Term 5:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{uu'u''^2\varphi'}{(1+u'^2)^{7/2}}\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{uu'}{(1+u'^2)^{7/2}}\right\|_{C^0}}_{\le\|uu'\|_{C^0}\le C}\underbrace{\|u''\|_{L^2}}_{\le\|u\|_{H^2}}\;\underbrace{\|\varphi'\|_{C^0}}_{\le C\,\|\varphi\|_{H^2}}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Term 6:

$$\left|\frac{\varphi'(\pm1)}{\left(1+u'(\pm1)^2\right)^{3/2}}\right|\;\le\;\underbrace{\left\|\frac{1}{(1+u'^2)^{3/2}}\right\|_{C^0}}_{\le 1}\underbrace{\|\varphi'\|_{C^0}}_{\le C\,\|\varphi\|_{H^2}}\;\le\;C\,\|\varphi\|_{H^2}\,.$$

Somit ist das Willmore-Funktional also Gâteaux-differenzierbar.

Schritt 3: Helfrich-Funktional ist Gâteaux-differenzierbar.

Man kombiniere die Gâteaux-Differenzierbarkeit des Flächenfunktionals aus Schritt 1 und die Gâteaux-Differenzierbarkeit des Willmore-Funktionals aus Schritt 2 zusammen mit der Tatsache, dass Summen Gâteaux-differenzierbarer Funktionen ebenso Gâteaux-differenzierbar sind und erhalte so die behauptete Aussage. □

Das Verschwinden der Gâteaux-Ableitung an bestimmten Punkten $u \in H_+$ bezüglich einer vorgegebenen Klasse von Testfunktionen φ, welche Dirichlet-Randdaten berücksichtigen, verdient einen eigenen Namen.

4.2.4 Definition (Schwache Helfrich-Gleichung)
Sei $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Für ein $u \in H_+$ nennt man die Bedingung

$$\left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \, , \, \varphi \right\rangle \;=\; 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(-1,1)$$

die **schwache Helfrich-Gleichung**. Ausgeschrieben hat diese nach Satz 4.2.3 die Form

$$\begin{aligned} & 2\int_{-1}^{1} \frac{uu''\varphi''}{(1+u'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - 5\int_{-1}^{1} \frac{uu'u''^2\varphi'}{(1+u'^2)^{7/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\ (\mathrm{sHG}_u) \qquad & + \int_{-1}^{1} \frac{u''^2\varphi}{(1+u'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x + 4\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x \\ & + 4\varepsilon\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2}\,\varphi\,\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \text{für } \varphi \in H_0^2(-1,1)\,. \end{aligned}$$

Lösungen der schwachen Helfrich-Gleichung heißen auch **schwache Lösungen der Helfrich-Gleichung**. ♦

4.2.5 Schwache und klassische Lösungen der Helfrich-Gleichung
Die Gâteaux-Ableitung des Helfrich-Funktionals besitzt im klassischen Kontext, d. h. für glatte Profilkurven, die sich wieder im Sinne von Kapitel 3 interpretieren lassen, die geometrische Interpretation als erste Variation. Hat man $u \in C^2([-1,1]) \cap H_+$ und $\varphi \in C^2([-1,1])$ gegeben, so definiert $u + t\varphi$, in der Sprache von Kapitel 3, insbesondere Abschnitt 3.2.4 und 3.4.4, für hinreichend kleine t eine Variation der Profilkurve u.

Ist $u \in C^4([-1,1]) \cap H_\alpha$ für ein $\alpha > 0$ eine schwache Lösung der Helfrich-Gleichung, so ist die zugehörige Rotationsfläche ein kritischer Punkt des Helfrich-Funktionals bezüglich der oben genannten Variationen der Profilkurve mit Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty([-1,1])$, welche die Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (3.1) erfüllen. Diese Variationen sind hinreichend dafür, dass die Profilkurve u bzw. die dazugehörige Rotationsfläche die Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) löst (siehe Diskussion in Abschnitt 3.4.4). Zur besseren Trennung der Begriffe nennen wir u im Kontext von (hinreichend glatten) Lösungen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) auch eine **klassische Lösung der Helfrich-Gleichung**. ■

4.2.6 Hilfssatz (Minimierer in H_α lösen schwache Helfrich-Gleichung)
Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ gegeben und $u \in H_\alpha$ ein Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α, sodass $\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon$, dann ist u eine schwache Lösung der Helfrich-Gleichung (sHG_u).

Beweis: Die Menge H_α lässt sich als Schnitt des affinen Teilraums

$$\hat{H}_\alpha \;:=\; \left\{ u \in H^2(-1,1) : \; u \text{ ist gerade}, \; u(\pm 1) = \alpha, \; u'(\pm 1) = 0 \right\}$$

mit H_+ auffassen. Als Minimum in H_α verschwindet die Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in $u \in H_\alpha$ bezüglich aller Richtungen $\varphi \in \hat{H}_0 \subset H_0^2(-1,1)$, sodass $u + t\varphi \in H_\alpha$ für hinreichend kleine t, nach Satz B.2.4, d. h.

$$\left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \,,\, \varphi \right\rangle = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \hat{H}_0 \,. \tag{4.4}$$

Sei nun $\varphi \in H_0^2(-1,1)$ beliebig, dann lässt sich dieses in einen geraden und ungeraden Anteil aufspalten, d. h. mit

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\big(\varphi(x) + \varphi(-x)\big)}_{=:\,\hat{\varphi}} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(\varphi(x) - \varphi(-x)\big)}_{=:\,\check{\varphi}}$$

als Summe einer geraden Funktion $\hat{\varphi}$ und einer ungeraden Funktion $\check{\varphi}$. Insbesondere ist dann $\hat{\varphi} \in \hat{H}_0$ und aus Gleichung (4.4) folgt

$$\left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \,,\, \varphi \right\rangle = \underbrace{\left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \,,\, \hat{\varphi} \right\rangle}_{=\,0} + \left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \,,\, \check{\varphi} \right\rangle = \left\langle \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u) \,,\, \check{\varphi} \right\rangle . \tag{4.5}$$

Andererseits verschwindet ebenso die Gâteaux-Ableitung bezüglich ungerader Funktionen. Dies folgt direkt aus der Form der Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{H}_\varepsilon$, dessen Integrand stets eine gerade Funktion ist, sofern φ gerade ist, und eine ungerade Funktion, falls φ ungerade ist. Als Integral über eine ungerade Funktion verschwindet damit die rechte Seite von Gleichung (4.5) und u löst in der Tat die schwache Helfrich-Gleichung (sHG_u). □

Das folgende Kapitel zeigt, dass Lösungen der schwachen Helfrich-Gleichung (sHG_u) stets glatt sind und damit sogar Lösungen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$).

4.3. Regularität axialsymmetrischer Helfrich-Flächen

Mit der Erkenntnis, dass Helfrich-Minimierer in H_α schwache Lösungen der Helfrich-Gleichung sind, ist es natürlich auch interessant zu wissen, ob sich dadurch mehr Regularität gewinnen lässt. In der Tat zeigt sich, dass schwache Lösungen stets glatt sind und damit auch klassische Lösungen der Helfrich-Gleichung.

4.3.1 Satz (Regularität schwacher Lösungen)
Sei $\varepsilon \geq 0$ gegeben und $u \in H_+$ eine Lösung der schwachen Helfrich-Gleichung (sHG_u). Dann ist sogar $u \in C^\infty([-1,1])$ und u ist eine klassische Lösung der Helfrich-Gleichung, d. h. eine Lösung von ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$), sofern $u \in H_\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

Beweis: Der Beweis richtet sich nach [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008, Theorem 4, Step 2]. Sei $u \in H_+$ als Lösung der schwachen Helfrich-Gleichung (sHG_u) gegeben. Im Verlauf des Beweises werden wir auch hier wieder die Einbettung $H^2(-1,1) \hookrightarrow C^1([-1,1])$ verwenden, um Schranken an u und u' von oben und unten zu erhalten. Das heißt, es gelte

$$c_1 \leq u \leq c_2 \,, \qquad |u'| \leq c_3 \,, \qquad \|u''\|_{L^2} \leq c_4 \tag{4.6}$$

für geeignete Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$. Wir unterteilen den Beweis in vier Schritte.

Schritt 1: Umformulierung der schwachen Helfrich-Gleichung.

Wir bezeichnen analog zu Abschnitt 3.1.6 mit

$$\kappa_u(x) := -\frac{u''(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{3/2}}$$

die geodätische Krümmung von u. Mit den Schranken aus Gleichung (4.6) erreicht man $\kappa_u \in L^2(-1,1)$. Die schwache Helfrich-Gleichung (sHG$_u$) lässt sich mit κ_u umschreiben zu

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1} \kappa_u \frac{u\varphi''}{1+u'^2}\,\mathrm{d}x = &-5\int_{-1}^{1}\kappa_u^2 \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}\frac{u'\varphi'}{u\left(1+u'^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&+\int_{-1}^{1}\kappa_u^2\sqrt{1+u'^2}\,\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}\frac{\varphi}{u^2\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x \\
&+4\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x + 4\varepsilon\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u'^2}\,\varphi\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.7}$$

für alle $\varphi \in H_0^2(-1,1)$.

Schritt 2: Testfunktion I – L^∞-Schranke für κ_u.

Wir betrachten für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(-1,1)$ die Testfunktion

$$\varphi(x) := \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y - \mu\,(1+x)^2 - \nu\,(1+x)^3$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu &:= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,,\\
\nu &:= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Es gelten dann

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y + 2\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&\quad - 2\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= 0\,,\\
\varphi(-1) &= 0\,,\\
\varphi'(1) &= \int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&\quad - 3\int_{-1}^{1}\eta(t)\,\mathrm{d}t + 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= 0\,,$$

$$\varphi'(-1) = 0$$

und somit ist φ eine gültige Testfunktion. Offensichtlich gilt $|\mu|, |\nu| \leq C\|\eta\|_{L^1}$ und somit auch $\|\varphi\|_{C^1} \leq C\|\eta\|_{L^1}$. Weiter hat man

$$\varphi''(x) \;=\; \eta(x) - 2\mu - 6\nu\,(1+x)\,.$$

Zusammen mit Gleichung (4.7) rechnet man ähnlich wie im Beweis von Satz 4.2.3 mit den Schranken aus Gleichung (4.6) dann

$$\begin{aligned}
2\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u \,\frac{u\eta}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right| \leq 5\; &\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u^2\,\frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\kappa_u\|_{L^2}^2\,\|\varphi\|_{C^1}} + \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\varphi\|_{C^1}} \\
&+ \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u^2\,\sqrt{1+u'^2}\;\varphi\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\kappa_u\|_{L^2}^2\,\|\varphi\|_{C^0}} + \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\,\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\varphi\|_{C^0}} \\
&+ 4\varepsilon\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\varphi\|_{C^1}} + 4\varepsilon\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2}\;\varphi\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\varphi\|_{C^0}} \\
&+ 4\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\mu}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\kappa_u\|_{L^2}^2\,|\mu|} + 12\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\nu\,(1+x)}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right|}_{\leq C\,\|\kappa_u\|_{L^2}^2\,|\nu|} \\
\leq\; &C\left[\underbrace{\|\varphi\|_{C^1}}_{\leq C\,\|\eta\|_{L^1}} + \|\eta\|_{L^1}\right] \\
\leq\; &C\,\|\eta\|_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

Wir haben also für alle $\eta \in C_0^\infty(-1,1)$

$$\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right| \;\leq\; C\,\|\eta\|_{L^1}$$

und somit definiert

$$F\colon C_0^\infty(-1,1) \to \mathbb{R}\,, \qquad \eta \mapsto \int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x$$

ein bezüglich der L^1-Norm lineares stetiges Funktional. Da $C_0^\infty(-1,1)$ dicht in L^1 liegt (siehe Satz B.3.3), lässt sich dieses zu einem linearen stetigen Funktional $\tilde{F}$ auf $L^1(-1,1)$ fortsetzen. Mit dem isometrischen Isomorphismus $\big[L^1(-1,1)\big]' \cong L^\infty(-1,1)$ (siehe Satz B.3.2) gibt es eine Funktion $h \in L^\infty(-1,1)$, sodass

$$\tilde{F}(\eta) \;=\; \int_{-1}^{1} h(x)\,\eta(x)\;\mathrm{d}x \qquad \text{für } \eta \in L^1(-1,1)\,.$$

Somit gilt

$$F(\eta) \;=\; \int_{-1}^{1} h(x)\,\eta(x)\;\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x \qquad \text{für } \eta \in C_0^\infty(-1,1)\,.$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Satz B.3.8) erhält man dann

$$\kappa_u\,\frac{u}{1+u'^2} \;=\; h \;\in L^\infty(-1,1)$$

fast überall auf $[-1,1]$. Folglich ist dann mit den Schranken aus Gleichung (4.6) auch $\kappa_u \in L^\infty(-1,1)$. Das impliziert insbesondere auch $u'' \in L^\infty(-1,1)$, also $u \in W^{2,\infty}(-1,1)$.

Schritt 3: Testfunktion II – $W^{1,\infty}$-Schranke für κ_u.

Nun betrachten wir für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(-1,1)$ die Testfunktion

$$\varphi(x) \;:=\; \int_{-1}^{x} \eta(t)\;\mathrm{d}t - \mu\,(1+x)^2 - \nu\,(1+x)^3$$

mit

$$\mu \;:=\; \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \eta(t)\;\mathrm{d}t\,, \qquad\qquad \nu \;:=\; -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \eta(t)\;\mathrm{d}t\,.$$

Offensichtlich gilt dann wieder $\varphi(\pm 1) = 0$ und $\varphi'(\pm 1) = 0$, sodass φ eine zulässige Testfunktion definiert. Mit

$$|\mu|, |\nu| \;\le\; C\,\|\eta\|_{L^1}\,, \qquad\qquad \|\varphi\|_{C^0} \;\le\; C\,\|\eta\|_{L^1}\,, \qquad\qquad \|\varphi'\|_{L^1} \;\le\; C\,\|\eta\|_{L^1}$$

und

$$\varphi''(x) \;=\; \eta'(x) - 2\mu - 6\nu\,(1+x)$$

rechnet man mit Gleichung (4.7) dann analog zu Schritt 2 wieder

$$\begin{aligned}
2\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right| \le\; & 5\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u^2\,\frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\kappa_u\|_{L^\infty}^2\,\|\varphi'\|_{L^1}} + \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\,(1+u'^2)^{3/2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\varphi'\|_{L^1}} \\
& + \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u^2\,\sqrt{1+u'^2}\;\varphi\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\kappa_u\|_{L^\infty}^2\,\|\varphi\|_{C^0}} + \underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\,\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\varphi\|_{C^0}} \\
& + 4\varepsilon\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\varphi'\|_{L^1}} + 4\varepsilon\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2}\;\varphi\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\varphi\|_{C^0}} \\
& + 4\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\mu}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\kappa_u\|_{L^\infty}\,|\mu|} + 12\,\underbrace{\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\nu\,(1+x)}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right|}_{\le C\,\|\kappa_u\|_{L^\infty}\,|\nu|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\left[\|\varphi\|_{C^0} + \|\varphi'\|_{L^1} + \|\eta\|_{L^1}\right] \\
&\leq C\,\|\eta\|_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

Für alle $\eta \in C_0^\infty(-1,1)$ gilt also

$$\left|\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x\right| \;\leq\; C\,\|\eta\|_{L^1}\,.$$

Das heißt,

$$\eta \;\mapsto\; \int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x$$

definiert ein bezüglich der L^1-Norm lineares stetiges Funktional auf der in $L^1(-1,1)$ dichten Teilmenge $C_0^\infty(-1,1)$. Analog zu Schritt 2 lässt sich dieses wieder zu einem linearen stetigen Funktional auf ganz $L^1(-1,1)$ fortsetzen. Die Dualität von L^p-Räumen liefert dann wieder eine Funktion $h \in L^\infty(-1,1)$, sodass

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,\eta(x)\;\mathrm{d}x \;=\; -\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\eta'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x \qquad \text{für } \eta \in C_0^\infty(-1,1)\,.$$

Aus der Definition von schwachen Ableitungen und Sobolev-Funktionen folgt somit, dass die Funktion $x \mapsto \kappa_u(x)\,\frac{u(x)}{1+u'(x)^2}$ in $W^{1,\infty}(-1,1)$ liegt. Insbesondere ist damit auch

$$\kappa_u \;=\; \kappa_u\,\frac{u}{1+u'^2}\,\frac{1+u'^2}{u} \;\in W^{1,\infty}(-1,1)\,.$$

Das wiederum impliziert auch $u'' \in W^{1,\infty}(-1,1)$, also $u \in W^{3,\infty}(-1,1)$.

Schritt 4: u ist glatt und löst Helfrich-Gleichung.

Wir nutzen Gleichung (4.7) nochmals aus, um eine im Ableitungsgrad der Funktion κ_u iterierbare Relation zu erhalten. Dazu wenden wir partielle Integration auf die linke Seite von Gleichung (4.7) an und erhalten

$$\int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u\varphi''}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x \;=\; -\int_{-1}^{1} \kappa_u'\,\frac{u\varphi'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \kappa_u\,\frac{u'\varphi'}{1+u'^2}\;\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\kappa_u\,\frac{u'^2u''\varphi'}{(1+u'^2)^2}}_{=-\kappa_u^2\frac{u'^2\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}}\;\mathrm{d}x\,.$$

Wieder eingesetzt in Gleichung (4.7) ergibt dies dann eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1}\left[2\kappa_u'\,\frac{u}{1+u'^2}\,\varphi' + F(u,u',u'')\,\varphi' + G(u,u',u'')\,\varphi\right]\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\left[2\kappa_u'\,\frac{u}{1+u'^2} + F(u,u',u'') - \int_{d}^{x} G(u,u',u'')\;\mathrm{d}y\right]\varphi'\;\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

für beliebiges $d \in [-1,1]$ und mit glatten Funktionen F und G. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Satz B.3.8) gilt dann

$$2\kappa_u'\,\frac{u}{1+u'^2} + F(u,u',u'') - \int_{d}^{x} G(u,u',u'')\;\mathrm{d}y \;=\; c$$

mit einer Konstanten c. Umstellen nach κ_u' liefert

$$\kappa_u' = \frac{1+u'^2}{2u}\left[c - F(u,u',u'') + \int_d^x G(u,u',u'')\ \mathrm{d}y\right]. \tag{4.8}$$

Nach Schritt 3 hatten wir $u \in W^{3,\infty}(-1,1)$ erreicht, was $u \in C^2([-1,1])$ impliziert (siehe Satz B.3.7). Somit ist die rechte Seite von Gleichung (4.8) in $C^0([-1,1])$. Die linke Seite ist also ebenso stetig. Das heißt demzufolge $\kappa_u \in C^1([-1,1])$. Aus der Definition von κ_u erhält man

$$u'' = -\kappa_u \left(1+u'^2\right)^{3/2}. \tag{4.9}$$

Die rechte Seite liegt nun in $C^1([-1,1])$, was $u \in C^3([-1,1])$ impliziert. Um $u \in C^\infty([-1,1])$ zu erhalten, geht man induktiv vor:

$$\begin{aligned} u \in C^k([-1,1]) \quad &\overset{(4.8)}{\Rightarrow} \quad \kappa_u' \in C^{k-2}([-1,1]) \quad \Rightarrow \quad \kappa_u \in C^{k-1}([-1,1]) \\ &\overset{(4.9)}{\Rightarrow} \quad u'' \in C^{k-1}([-1,1]) \quad \Rightarrow \quad u \in C^{k+1}([-1,1]). \end{aligned}$$

Somit liegt u also in $C^\infty([-1,1])$. Nach Abschnitt 4.2.5 ist u dann als glatte Lösungen der schwachen Helfrich-Gleichung (sHG$_u$) auch automatisch eine klassische Lösung der Helfrich-Gleichung. Somit löst $u \in H_\alpha$ das Dirichlet-Problem (HG$_{u,\alpha}$).

4.3.2 Folgerung (Regularität von Helfrich-Minimierern)
Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Dann sind Minimierer $u \in H_\alpha$ des Helfrich-Funktionals mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon$ glatt, d. h. $u \in C^\infty([-1,1])$, und lösen die Helfrich-Gleichung (HG$_{u,\alpha}$).

Beweis: Nach Hilfssatz 4.2.6 löst ein Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α die schwache Helfrich-Gleichung (sHG$_u$). Mit dem Regularitätsresultat aus Satz 4.3.1 ist dieser Minimierer dann glatt und löst die Helfrich-Gleichung (HG$_{u,\alpha}$). □

4.4. Kriterium für Existenz von Helfrich-Minimierern

Mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ aus Satz 4.2.1 und der lokalen schwachen Folgenkompaktheit von H^2 sind die Voraussetzungen der direkten Methode der Variationsrechnung erfüllt. Wir wenden diese nun an, um ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Helfrich-Minimierern in H_α anzugeben, welche wir dann in Kapitel 5 genauer untersuchen werden.

4.4.1 Satz (Kriterium für Existenz von Minimierern)
Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Gibt es eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_\alpha$ für das Infimum M_α^ε des Helfrich-Funktionals $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α, welche durch

$$c_1 \leq u_k \leq c_2 \qquad \text{und} \qquad |u_k'| \leq c_3 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

beschränkt ist mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$, so gibt es einen Minimierer $u \in H_\alpha$ von $\mathcal{H}_\varepsilon$ mit

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon = \inf_{v\in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v), \qquad c_1 \leq u \leq c_2 \qquad \text{und} \qquad |u'| \leq c_3.$$

Es ist dann $u \in C^\infty([-1,1])$ und u löst das Dirichlet-Problem für Helfrich-Flächen

$$(\mathrm{HG}_{u,\alpha}) \qquad \begin{cases} \Delta_{g_u} H_u + 2H_u\,(H_u^2 - K_u) - 2\varepsilon H_u \;=\; 0 & \textit{auf } (-1,1)\,, \\ u(\pm 1) = \alpha\,, \quad u'(\pm 1) \;=\; 0\,, \end{cases}$$

beschreibt also die Profilkurve einer axialsymmetrischen Helfrich-Fläche.

Beweis: Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_\alpha$ eine Minimalfolge für M_α^ε von $\mathcal{H}_\varepsilon$ mit den geforderten Schranken, sodass

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \;=\; \inf_{v\in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v) \;=\; M_\alpha^\varepsilon\,.$$

Wir wollen Beschränktheit von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $H^2(-1,1)$ zeigen, um dann die lokale schwache Folgenkompaktheit von $H^2(-1,1)$ ausnutzen zu können.

Die L^2-Schranken von u_k und u_k' sind evident mit den gegebenen Schranken

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \;=\; \int_{-1}^1 \big|u_k(x)\big|^2 \;\mathrm{d}x \;\le\; 2\,c_2^2 \;\le\; C\,, \qquad \|u_k'\|_{L^2}^2 \;=\; \int_{-1}^1 \big|u_k'(x)\big|^2 \;\mathrm{d}x \;\le\; 2\,c_3^2 \;\le\; C\,.$$

Somit bleibt also nur eine L^2-Schranke für u_k'' zu finden. Diese erhalten wir durch Abschätzen der Helfrich-Energien entlang der Minimalfolge. Dazu nehmen wir ohne Einschränkung an, dass für ein $\delta > 0$ gilt, dass alle u_k

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \;\le\; M_\alpha^\varepsilon + \delta$$

erfüllen. Wir rechnen dann

$$\begin{aligned} M_\alpha^\varepsilon + \delta &\ge \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \\ &= \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{u_k(x)\,\sqrt{1+u_k'(x)^2}} + 4\varepsilon\, u_k(x)\,\sqrt{1+u_k'(x)^2}\right) \mathrm{d}x}_{\ge 0} + \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{u_k(x)\,u_k''(x)^2}{\big(1+u_k'^2\big)^{5/2}}\;\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{\pi c_1}{2\big(1+c_3^2\big)^{5/2}} \int_{-1}^1 u_k''(x)^2\;\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{\pi c_1}{2\big(1+c_3^2\big)^{5/2}}\,\|u_k''\|_{L^2}^2\,, \end{aligned}$$

sodass

$$\|u_k''\|_{L^2}^2 \;\le\; \frac{2\big(1+c_3^2\big)^{5/2}\,(M_\alpha^\varepsilon + \delta)}{\pi c_1} \;\le\; C\,.$$

Kombiniert man die so erhaltenen L^2-Schranken von u_k, u_k' und u_k'', so bekommt man, dass $\|u_k\|_{H^2}$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist und u_k somit eine beschränkte Folge in H^2 ist. Mit der lokalen schwachen Folgenkompaktheit von $H^2(-1,1)$ (siehe Satz B.2.1) erhalten wir ein $u \in H^2(-1,1)$, sodass nach Auswahl einer Teilfolge

$$u_k \;\rightharpoonup\; u \quad \text{in } H^2(-1,1)\,.$$

Mit der Kompaktheit der Einbettung $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^1([-1,1])$ (siehe wieder Satz B.3.6) haben wir insbesondere

$$u_k \to u \quad \text{in } C^1([-1,1])\,.$$

Die Eigenschaften von H_α übertragen sich dadurch auch auf u, sodass u eine gerade Funktion ist mit $u > 0$, $u(\pm 1) = \alpha$ und $u'(\pm 1) = 0$. Damit ist dann $u \in H_\alpha$.

Mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in $H_\alpha \subset H_+$ aus Satz 4.2.1 haben wir

$$M_\alpha^\varepsilon \le \mathcal{H}_\varepsilon(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) = M_\alpha^\varepsilon\,,$$

also Gleichheit überall. Das heißt, u minimiert das Helfrich-Funktional $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α. Nach Hilfssatz 4.2.6 ist u eine schwache Lösung der Helfrich-Gleichung und nach Folgerung 4.3.2 ist u glatt, also $u \in C^\infty([-1,1])$, und ebenso eine klassische Lösung der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$). □

Zum Schluss zeigen wir noch, dass die Schranken an die ersten Ableitungen entlang einer Minimalfolge in Satz 4.4.1 die wichtigsten sind in der Hinsicht, dass diese bereits obere und untere Schranken an die Funktionswerte der Elemente der Minimalfolge implizieren.

4.4.2 Hilfssatz

Seien $\alpha > 0$, $\varepsilon \ge 0$ und $u \in H_\alpha$ gegeben. Seien weiter $c, E > 0$ beliebige Konstante, sodass

$$\mathcal{W}(u) \le E \qquad \text{und} \qquad \big|u'(x)\big| \le c \qquad \text{für } x \in [-1,1]\,.$$

Dann gibt es Konstanten

$$c_1 = \alpha \exp\left(- \frac{c\sqrt{1+c^2}\; E}{\pi} \right) > 0 \qquad \text{und} \qquad c_2 = \alpha + c > 0\,,$$

sodass

$$c_1 \le u(x) \le c_2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

Beweis: Die Abschätzungen der Schranken an u teilen wir in zwei Schritte.

Schritt 1: Untere Schranke an u.

Für $x \in [0,1]$ schätzen wir für die untere Schranke

$$\begin{aligned}
-\log u(x) &= \log u(1) - \log u(x) - \log u(1) \\
&= \int_x^1 \frac{u'(y)}{u(y)}\, \mathrm{d}y - \log\alpha \\
&\le \int_0^1 \left| \frac{u'(x)}{u(x)} \right| \mathrm{d}x - \log\alpha \\
&\le c\sqrt{1+c^2} \int_0^1 \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}\, \mathrm{d}x - \log\alpha
\end{aligned}$$

$$\leq c\sqrt{1+c^2}\,\Bigg(\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}}\;\mathrm{d}x + \int_0^1 \kappa_u(x)^2\;\mathrm{d}S_u(x)}_{=\frac{1}{\pi}\mathcal{W}(u)}\Bigg) - \log\alpha$$

$$\leq \frac{c\sqrt{1+c^2}\;E}{\pi} - \log\alpha$$

ab, sodass

$$u(x) \;\geq\; \exp\Bigg(-\frac{c\sqrt{1+c^2}\;E}{\pi} + \log\alpha\Bigg) \;=\; \alpha\,\exp\Bigg(-\frac{c\sqrt{1+c^2}\;E}{\pi}\Bigg) \;=\; c_1\,.$$

Aus der Symmetrie von u folgt dies auch für alle $x \in [-1, 1]$.

Schritt 2: Obere Schranke an u.

Die obere Schranke an u erhalten wir direkt durch Integration der oberen Schranke der Ableitung von u. Für $x \in [0, 1]$ gilt

$$u(x) \;=\; u(1) - \int_x^1 u'(x)\;\mathrm{d}x \;\leq\; \alpha + \int_x^1 \big|u'(x)\big|\;\mathrm{d}x \;\leq\; \alpha + c\,(1-x) \;\leq\; \alpha + c \;=\; c_2\,.$$

Die Symmetrie von u liefert die Abschätzung dann wieder für alle $x \in [-1, 1]$. □

4.4.3 Proposition (Hinreichendes Kriterium für Schranken an Minimalfolge)
Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Weiter sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_\alpha$ eine Minimalfolge für M_α^ε, sodass

$$|u_k'| \;\leq\; c \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$c_1 \;\leq\; u_k \;\leq\; c_2 \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis: Für $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Minimalfolge ist $\mathcal{W}(u_k)$ eine beschränkte reelle Folge, sodass es ein $E > M_\alpha^\varepsilon$ gibt mit $\mathcal{W}(u_k) \leq E$ unabhängig von $k \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 4.4.2 erhalten wir dann obere und untere Schranken an die u_k, welche lediglich von c und von E abhängen. □

5. Parameterbereiche für Existenz von Helfrich-Minimierern

Im letzten Kapitel, Kapitel 4, haben wir das Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung in ein der Variationsrechnung zugängliches Problem umformuliert. Wir konnten ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Minimierern des Helfrich-Funktionals $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α als Beispiele von Lösungen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) formulieren. Weiter haben sich die Lösungen als glatt herausgestellt, sodass diese in der Tat Profilkurven von axialsymmetrischen Helfrich-Flächen definieren. Hier geben wir nun einige Bereiche von Parametersätzen (α, ε) an, für die das hinreichende Kriterium zur Existenz erfüllt ist. Dazu verallgemeinern wir einerseits einen Existenzsatz für Willmore-Minimierer auf das Helfrich-Funktional für hinreichend kleine Flächenanteile ε. Andererseits tragen wir das Resultat aus [Scholtes, 2011] zusammen und modifizieren dieses noch leicht.

Kapitel 5.1 beschäftigt sich mit den Parametern α und ε, für die es triviale Minimierer, also Zylinder, gibt bzw. für die es keine geben kann. In Kapitel 5.2 zeigen wir einen Existenzsatz für Willmore-Minimierer, welcher auf einer Energie-Methode basiert. Wir beobachten, dass die Energie-Barriere dort kleine Flächenanteile im Funktional und damit eine Verallgemeinerung auf das Helfrich-Funktional erlaubt, was wir in Kapitel 5.3 zeigen. In Kapitel 5.4 wird das Resultat aus [Scholtes, 2011] zusammengefasst, sodass wir in Kapitel 5.5 eine Übersicht und Diskussion aller Existenzbereiche geben können.

5.1. Triviale Minimierer

Wir zeigen zunächst, für welche Parametersätze (α, ε) es Zylinder als triviale Minimierer des Helfrich-Funktionals geben kann.

5.1.1 Satz (Zylinder als Minimierer)
*Für $\varepsilon > 0$ ist der Zylinder mit $u_* \equiv \alpha_*$ zum Randwert $\alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ der eindeutige Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_{α_*} mit Helfrich-Energie $\mathcal{H}_\varepsilon(u_*) = 4\pi\sqrt{\varepsilon}$. Weiter gilt sogar für beliebiges $\alpha > 0$, dass $\mathcal{H}_\varepsilon(u_*) \le \mathcal{H}_\varepsilon(u)$ für alle $u \in H_\alpha$. Ist ferner ein $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u_*) = \mathcal{H}_\varepsilon(u)$ gegeben, so impliziert dies bereits $u = u_*$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nennen wir u_* dann einen **Gleichgewichtszylinder**.*

Beweis: Der Beweis orientiert sich an [Scholtes, 2011]. Nach Beispiel 3.5.1 besitzt u_* die Helfrich-Energie

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u_*) = 4\pi\varepsilon\left(\alpha_* + \frac{1}{4\varepsilon\alpha_*}\right) = 4\pi\sqrt{\varepsilon}\ .$$

Für ein u in H_α gilt mit Abschnitt 3.6.2

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon(u) \;&=\; \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} + 4\varepsilon\, u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}_{\geq 4\sqrt{\varepsilon}}\Bigg)\;\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\kappa_u(x)^2\;\mathrm{d}S_u(x)}_{\geq 0}\\ &\geq\; \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} 4\sqrt{\varepsilon}\;\mathrm{d}x \;=\; 4\pi\sqrt{\varepsilon} \;=\; \mathcal{H}_\varepsilon(u_*)\,.\end{aligned}$$

Die strikte Ungleichung für Funktionen $u \neq u_*$ lässt sich auch zeigen. Die Gleichheit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) = \mathcal{H}_\varepsilon(u_*)$ impliziert nach Abschnitt 3.6.2 die Bedingung

$$u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \;=\; \alpha_*\,. \tag{5.1}$$

Ist $\alpha = \alpha_*$, so gibt es ein $x_0 \in (-1,1)$, sodass $u(x_0) \neq \alpha_*$ und $u'(x_0) = 0$, womit die Gleichheitsbedingung (5.1) für x_0 verletzt ist. Wegen der Stetigkeit von u und u' wird diese allerdings auch auf einer kleinen Umgebung von x_0 verletzt sein. Ist wiederum $\alpha \neq \alpha_*$, so gibt es wieder wegen der Wahl der Randdaten in H_α und der Stetigkeit von u und u' eine hinreichend kleine Umgebung von $x_0 = 1$ in $[-1,1]$, sodass die Gleichheitsbedingung (5.1) dort ebenso nicht erfüllt ist. Das Verletzen der Gleichheitsbedingung (5.1) auf kleinen Umgebungen impliziert $\mathcal{H}_\varepsilon(u) > \mathcal{H}_\varepsilon(u_*)$. Somit ist insbesondere u_* ein strikter Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_{α_*}. □

Der Bereich, in dem die Gleichgewichtszylinder Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ darstellen, wurde in der Zusammenfassung in Bild 5.3 grafisch dargestellt. Wir zeigen jetzt noch, dass Zylinder für Randwerte $\alpha \neq \alpha_*$ keine Minimierer sein können.

5.1.2 Hilfssatz

Für $\varepsilon > 0$ beschreibt der Zylinder $u \equiv \alpha$ eine Helfrich-Fläche genau dann, wenn $\alpha = \alpha_*$ mit α_* aus Satz 5.1.1. Für $\varepsilon = 0$ kann der Zylinder keine Helfrich-, bzw. Willmore-Fläche sein.

Beweis: $u \equiv \alpha$ mit der mittleren Krümmung $H_u = \frac{1}{2\alpha}$ eingesetzt in die Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) ergibt

$$\frac{1}{4\alpha^3} - \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\,,$$

sodass u eine Lösung ist, falls $\alpha = \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Falls $\varepsilon = 0$, so ist u als Lösung nicht möglich. □

5.1.3 Folgerung (Nichttriviale Minimierer)

*Seien $\varepsilon \geq 0$ und $\alpha \neq \alpha_*$ mit α_* aus Satz 5.1.1. Dann kann es **keinen** Zylinder als Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α geben.*

Beweis: Nach Folgerung 4.3.2 muss ein Zylinder $u \equiv \alpha$ als Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ die Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) lösen. Nach 5.1.2 ist u eine Lösung genau dann, wenn $\alpha = \alpha_*$, was nicht mit den Voraussetzungen zu vereinbaren ist. □

5.2. Existenz von Willmore-Minimierern

Bevor wir uns weiter mit der Existenz von Helfrich-Minimierern beschäftigen, zeigen wir hier einen Existenzsatz für Willmore-Minimierer in H_α. Diese sind bereits nach [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008] bekannt. Im Gegensatz zum dort geführten Beweis, welcher stark von der konformen Invarianz des Willmore-Funktionals profitiert, basiert der Beweis hier auf einer Energie-Methode.

Wir können hier auf der Theorie aus Kapitel 4 aufbauen, da wir dort Wert darauf gelegt haben, dass alle gezeigten Resultate auch für $\mathcal{H}_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 0$, also für $\mathcal{W}$, gelten. Wir verwenden hier die Notation $M_\alpha := M_\alpha^0$. Der Erfolg des Existenzsatzes mit der Energie-Methode basiert auf der Verwendung einer geeigneten Hilfsfunktion, welche wir zunächst konstruieren.

5.2.1 Eine Hilfsfunktion

Wir wollen zu gegebenem $\alpha > 0$ eine Hilfsfunktion w_α mittels „Verkleben" einer Sphäre an zwei Katenoide konstruieren. Dazu definieren wir $v(x) := \alpha \cosh\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)$ für $x \in (0,1]$. An dieses Katenoid soll an einem eindeutig bestimmten Punkt $x_0 \in (0,1)$ eine im Ursprung zentrierte Sphäre „geklebt" werden. Damit die resultierende Hilfsfunktion differenzierbar in x_0 ist, muss

$$0 \;=\; x_0 + v(x_0)\, v'(x_0) \;=\; x_0 + \alpha \cosh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right) \sinh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right) \;=\; x_0 - \frac{\alpha}{2} \sinh\left(\frac{2\,(1-x_0)}{\alpha}\right)$$

gelten. Da die Funktion $x \mapsto x + v(x)\, v'(x)$ strikt monoton steigend ist und

$$\text{bei } x = \frac{1}{2}: \qquad \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2n}\,(2n+1)!}\right) \;<\; 0\,,$$

$$\text{bei } x = 1: \qquad 1 + \alpha \cosh(0) \sinh(0) \;=\; 1 \;>\; 0$$

gilt, muss es wegen des Vorzeichenwechsels ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ geben mit $0 = x_0 + v(x_0)\, v'(x_0)$. Wir definieren dann die Hilfsfunktion w_α durch (siehe Bild 5.1)

$$w_\alpha(x) \;:=\; \begin{cases} v(|x|)\,, & x_0 \le |x| \le 1\,, \\ \sqrt{x_0^2 + v(x_0)^2 - x^2}\,, & 0 \le |x| < x_0\,. \end{cases}$$

Per Konstruktion ist w_α stetig differenzierbar. Da ferner die Ableitungen von w_α auf den Intervallen $[-1, x_0], [-x_0, x_0]$ und $[x_0, 1]$ Lipschitz-stetig sind, gilt sogar $w_\alpha \in C^{1,1}([-1,1]) = W^{2,\infty}(-1,1)$ (siehe Satz B.3.7) und damit $w_\alpha \in H_\alpha$. ■

Diese Hilfsfunktion erlaubt es uns nun, eine für unsere Zwecke geeignete Abschätzung des Infimums M_α der Willmore-Energie anzugeben.

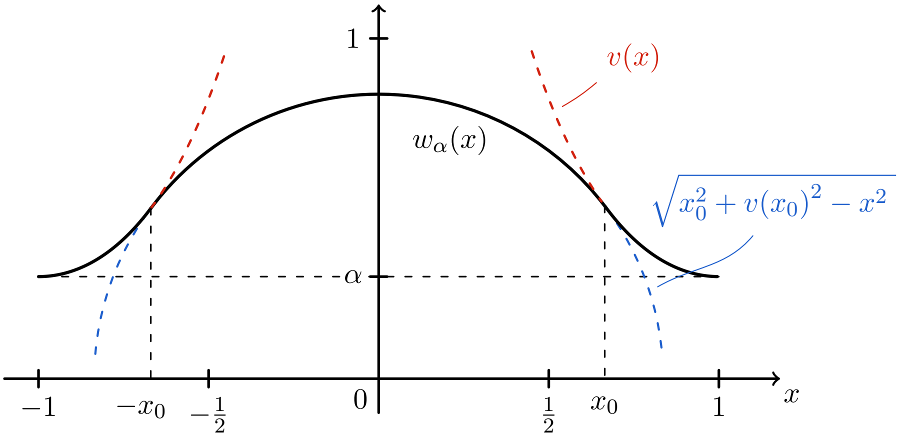


Bild 5.1: Konstruktion der Hilfsfunktion w_α durch „Verkleben" einer Sphäre an zwei Katenoide, hier mit $\alpha = 0.3$.

5.2.2 Hilfssatz ([*Gazzola, Grunau und Sweers, 2010*, Lemma 8.6])
Für $\alpha > 0$ ist das Infimum M_α von $\mathcal{W}$ über H_α nach oben beschränkt durch

$$M_\alpha < 4\pi \tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

Insbesondere ist damit $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = 0$.

Beweis: Für den Beweis schätzen wir die Willmore-Energie der Hilfsfunktion w_α aus Abschnitt 5.2.1 nach oben ab. Dabei nutzen wir den Trick, die Willmore-Energie links vom Punkt x_0 mit dem hyperbolischen Willmore-Funktional aus Kapitel 3.3 zu berechnen. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(w_\alpha) &= 2\pi \int_{-1}^{1} H_{w_\alpha}(x)^2 \, \mathrm{d}S_{w_\alpha}(x) \\
&\overset{3.3.3}{=} \pi \int_0^{x_0} \underbrace{H_{h,w_\alpha}(x)^2}_{\substack{=0,\text{ da Kreissegmente Geodäten} \\ \text{in hyperbolischer Halbebene sind}}} \mathrm{d}S_{h,w_\alpha}(x) - 4\pi \left[\frac{w_\alpha'(x)}{\sqrt{1+w_\alpha'(x)^2}}\right]_0^{x_0} + 4\pi \int_{x_0}^{1} \underbrace{H_{w_\alpha}(x)^2}_{=0,\text{ da Katenoid}} \mathrm{d}S_{w_\alpha}(x) \\
&= -4\pi \frac{w_\alpha'(x_0)}{\sqrt{1+w_\alpha'(x_0)^2}} = -4\pi \frac{\sinh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right)} = 4\pi \tanh\left(\frac{1-x_0}{\alpha}\right) \overset{x_0 > \frac{1}{2}}{<} 4\pi \tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right).
\end{aligned}$$

□

Der im Beweis verwendete „Energie-Trick", links und rechts von „speziellen" Punkten mit dem normalen und dem hyperbolischen Willmore-Funktional zu rechnen, ermöglicht es letztendlich auch, Schranken an die ersten Ableitungen von Funktionen mit beschränkter Willmore-Energie zu bekommen. Dies gelingt allerdings nur für Funktionen, deren Willmore-Energien unter der Energie-Barriere von 4π liegen. Nach Hilfssatz 5.2.2 ist dies aber ausreichend in Hinsicht auf Minimalfolgen für M_α.

5.2.3 Satz
Zu $\alpha > 0$ gibt es für jedes $E \in (0, 4\pi)$ eine Konstante

$$c = c(E) := \frac{E}{\sqrt{16\pi^2 - E^2}} > 0\,,$$

sodass für jedes $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{W}(u) \leq E$ gilt, dass

$$\left|u'(x)\right| \leq c \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1]\,.$$

Beweis: Sei $x_0 \in [0, 1]$ so gewählt, dass $|u'(x_0)| = \max_{x\in[0,1]} |u'(x)|$. Es reicht dann $|u'(x_0)| \leq c$ zu zeigen. Ist $u'(x_0) \geq 0$, so schätzen wir $\mathcal{W}(u)$ ab, indem wir links von x_0 mithilfe des normalen und rechts davon mithilfe des hyperbolischen Willmore-Funktionals rechnen (vgl. Bild 5.2):

$$\begin{aligned}
E &\geq \mathcal{W}(u) \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) \\
&= 4\pi \int_{0}^{x_0} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) + 4\pi \int_{x_0}^{1} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) \\
&\overset{3.3.3}{=} 4\pi \int_0^{x_0} \underbrace{H_u(x)^2}_{\geq 0} \, \mathrm{d}S_u(x) + \pi \int_{x_0}^{1} \underbrace{\kappa_{h,u}(x)^2}_{\geq 0} \, \mathrm{d}S_{h,u}(x) - 4\pi \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right]_{x_0}^{1} \\
&\geq 4\pi \frac{u'(x_0)}{\sqrt{1 + u'(x_0)^2}}\,.
\end{aligned}$$

Für den Fall $u'(x_0) < 0$ rechnen wir andererseits links von x_0 mithilfe des hyperbolischen und

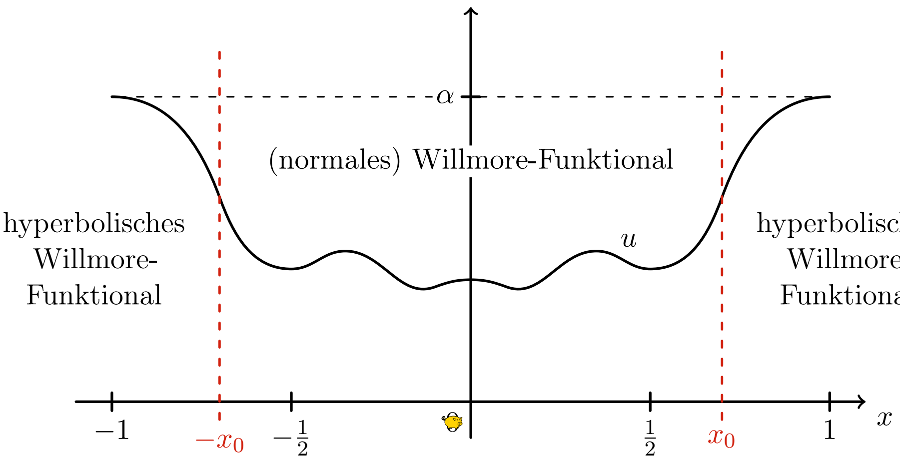


Bild 5.2: Zur Abschätzung der Willmore-Energie von u wird diese im Intervall $[-x_0, x_0]$ mit dem normalen und in den Intervallen $[-1, -x_0]$ und $[x_0, 1]$ mit dem hyperbolischen Willmore-Funktional berechnet.

rechts davon mithilfe des normalen Willmore-Funktionals:

$$E \geq \mathcal{W}(u)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-1}^{1} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) \\
&= 4\pi \int_{0}^{x_0} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) + 4\pi \int_{x_0}^{1} H_u(x)^2 \, \mathrm{d}S_u(x) \\
&\overset{3.3.3}{=} \pi \int_{0}^{x_0} \underbrace{\kappa_{h,u}(x)^2}_{\geq 0} \, \mathrm{d}S_{h,u}(x) - 4\pi \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right]_0^{x_0} + 4\pi \int_{x_0}^{1} \underbrace{H_u(x)^2}_{\geq 0} \, \mathrm{d}S_u(x) \\
&\geq -4\pi \, \frac{u'(x_0)}{\sqrt{1+u'(x_0)^2}} \, .
\end{aligned}
$$

Somit gilt also

$$
E^2 \;\geq\; 16\pi^2 \, \frac{u'(x_0)^2}{1+u'(x_0)^2} \, .
$$

Umstellen der Gleichung liefert letztendlich für beliebiges $x \in [-1,1]$

$$
\left|u'(x)\right| \;\leq\; \left|u'(x_0)\right| \;\leq\; \frac{E}{\sqrt{16\pi^2 - E^2}} \;\overset{\text{def}}{=}\; c \, .
$$

□

Mit Satz 5.2.3 sind wir dann in der Lage, mithilfe von Proposition 4.4.3 den Existenzsatz 4.4.1 für den Existenzbeweis von Willmore-Minimierern anzuwenden.

5.2.4 Folgerung (Existenz von Willmore-Minimierern)
Für alle $\alpha > 0$ existiert eine Funktion $u \in H_\alpha$, sodass

$$
\mathcal{W}(u) \;=\; M_\alpha \;=\; \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{W}(v) \, .
$$

Dieses u ist sogar in $C^\infty([-1,1])$ und löst die Willmore-Gleichung für axialsymmetrische Flächen.

Beweis: Sei eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_\alpha$ für M_α gegeben, sodass

$$
\lim_{k\to\infty} \mathcal{W}(u_k) \;=\; \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{W}(v) \;=\; M_\alpha \, .
$$

Nach Hilfssatz 5.2.2 lässt sich annehmen, dass $\mathcal{W}(u_k) \leq E$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ und für ein $E \in (M_\alpha, 4\pi) \neq \emptyset$. Nach Satz 5.2.3 sind die ersten Ableitungen entlang der Minimalfolge gleichmäßig beschränkt. Es existiert also eine Konstante $c = c(E) > 0$, sodass

$$
|u_k'| \;\leq\; c \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \, .
$$

Nach Proposition 4.4.3 ist somit auch

$$
c_1 \;\leq\; u_k \;\leq\; c_2 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}
$$

für $c_1, c_2 > 0$ und somit lässt sich der Existenzsatz 4.4.1 anwenden. Dieser liefert einen Minimierer u von $\mathcal{W}$ in H_α, welcher sogar $u \in C^\infty([-1,1])$ erfüllt und die Willmore-Gleichung löst. □

5.3. Verallgemeinerung der Existenz von Willmore-Minimierern für das Helfrich-Funktional

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass die erste Ableitung von Funktionen mit einer Willmore-Energie, welche unterhalb der Energie-Barriere von 4π liegt, durch eine Konstante beschränkt ist, welche lediglich von der Willmore-Energie der Funktionen abhängt. Nach Hilfssatz 5.2.2 liegt das Infimum

$$M_\alpha \,<\, 4\pi \,\tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \,<\, 4\pi$$

zum Randwert α unterhalb dieser Energie-Barriere. Die Idee ist es nun, die Existenz aus Folgerung 5.2.4 auf das Helfrich-Funktional zu verallgemeinern, indem man kleine Flächenanteile zulässt, sodass die Willmore-Energien entlang von Minimalfolgen für M_α^ε weiterhin unter dieser Energie-Barriere liegen.

Zunächst erweitern wir Hilfssatz 5.2.2 um eine Flächenabschätzung der Hilfsfunktion w_α aus Abschnitt 5.2.1 auf das Helfrich-Funktional.

5.3.1 Hilfssatz

Für $\alpha > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ ist das Infimum M_α^ε von $\mathcal{H}_\varepsilon$ über H_α nach oben beschränkt durch

$$M_\alpha^\varepsilon \,<\, 4\pi \,\tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right) + 4\pi\varepsilon\left[\sqrt{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4}\,\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right] \,=:\, \hat{M}_\alpha^\varepsilon\,.$$

Beweis: Zusammen mit der Abschätzung der Willmore-Energie

$$\mathcal{W}(w_\alpha) \,<\, 4\pi\,\tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$

aus dem Beweis von Hilfssatz 5.2.2 für die Hilfsfunktion w_α aus Abschnitt 5.2.1 erhalten wir die Abschätzung für M_α^ε aus einer Abschätzung der Fläche $\mathcal{A}(w_\alpha)$. Mit $r = \sqrt{x_0^2 + v(x_0)^2}$ und $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(w_\alpha) &= 2\pi \int_{-1}^{1} w_\alpha(x)\,\sqrt{1+w_\alpha'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^{x_0} w_\alpha(x)\,\sqrt{1+w_\alpha'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x + 4\pi\int_{x_0}^{1} w_\alpha(x)\,\sqrt{1+w_\alpha'(x)^2}\;\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^{x_0} \sqrt{r^2-x^2}\,\left(1+\frac{x^2}{r^2-x^2}\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + 4\pi\int_{x_0}^{1} \alpha\,\cosh\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)\left[1+\sinh\left(\frac{1-x}{\alpha}\right)^2\right]^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi\int_0^{x_0} r\,\mathrm{d}x + 4\pi\alpha\int_{x_0}^{1}\underbrace{\cosh\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)^2}_{=\,\frac{1+\cosh\left(\frac{2(1-x)}{\alpha}\right)}{2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi x_0 r + 2\pi\alpha\left(1 - x_0 - \left[\frac{\alpha}{2}\sinh\left(\frac{2(1-x)}{\alpha}\right)\right]_{x_0}^{1}\right)\\
&= 4\pi x_0\sqrt{x_0^2 + v(x_0)^2} + 2\pi\alpha\left(1 - x_0 + \frac{\alpha}{2}\sinh\left(\frac{2(1-x_0)}{\alpha}\right)\right)\\
&\overset{\frac{1}{2}<x_0<1}{<} 4\pi\sqrt{1+\alpha^2} + \pi\alpha + \pi\alpha^2\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Die Kombination beider Abschätzungen liefert die Behauptung. □

Nun versuchen wir abzuschätzen, wie groß der Flächenanteil ε sein darf, damit Funktionen, deren Helfrich-Energie unterhalb der Energieschranke aus Hilfssatz 5.3.1 liegt, eine Willmore-Energie unterhalb der Energie-Barriere von 4π besitzen.

5.3.2 Hilfssatz

Es seien $\alpha > 0$ und

$$0 \le \varepsilon < \frac{1 - \tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right)}{\sqrt{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4}\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4}}.$$

Dann gibt es eine Konstante $E = E(\alpha,\varepsilon) < 4\pi$, sodass sich die Willmore-Energie jedes $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \le \hat{M}_\alpha^\varepsilon$ durch $\mathcal{W}(u) \le E$ abschätzen lässt.

Beweis: Sei $u \in H_\alpha$ gegeben mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \le \hat{M}_\alpha^\varepsilon$. Der Beweis gelingt uns durch die Anwendung der Abschätzung der Willmore-Energie aus Folgerung 3.6.3. Es sei angemerkt, dass die Abschätzung auch im Kontext von H^2-glatten Profilkurven ihre Gültigkeit behält. Nach dieser gilt dann

$$\mathcal{W}(u) \le \frac{1}{2}\left[\hat{M}_\alpha^\varepsilon + \sqrt{\left(\hat{M}_\alpha^\varepsilon\right)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\,\right].$$

Es reicht dann zu zeigen, dass die rechte Seite nach oben durch 4π beschränkt ist. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\hat{M}_\alpha^\varepsilon$ in der Form $a + \varepsilon b$ mit Konstanten $a = a(\alpha)$ und $b = b(\alpha)$. Wir rechnen dann

$$
\begin{aligned}
& & \frac{1}{2}\left[a + \varepsilon b + \sqrt{(a+\varepsilon b)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\,\right] &< 4\pi\\
&\Leftrightarrow & \sqrt{(a+\varepsilon b)^2 - 16\pi^2\varepsilon} &< 8\pi - (a+\varepsilon b)\\
&\Leftrightarrow & \cancel{(a+\varepsilon b)^2} - 16\pi^2\varepsilon &< 64\pi^2 - 16\pi(a+\varepsilon b) + \cancel{(a+\varepsilon b)^2}\\
&\Leftrightarrow & (b-\pi)\,\varepsilon &< 4\pi - a\\
&\Leftrightarrow & \varepsilon &< \frac{4\pi - a}{b - \pi}.
\end{aligned}
$$

Mit den expliziten Ausdrücken für a und b ergibt die letzte Ungleichung

$$\varepsilon < \frac{1 - \tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right)}{\sqrt{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4}\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4}},$$

was nach Voraussetzung erfüllt ist. □

Mit Hilfssatz 5.3.2 sind wir nun wieder in der Lage, Satz 5.2.3 anwenden zu können, um so die Existenz von Helfrich-Minimierern zeigen zu können. Der Bereich, in dem wir hier die Existenz zeigen können, ist in der Zusammenfassung in Bild 5.3 grafisch dargestellt.

5.3.3 Satz (Existenz von Helfrich-Minimierern I)
Seien $\alpha > 0$ und

$$0 \le \varepsilon < \frac{1 - \tanh\left(\frac{1}{2\alpha}\right)}{\sqrt{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4} \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4}}.$$

Dann gibt es einen Minimierer u von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α, welcher sogar in $C^\infty([-1,1])$ liegt und das Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$ löst.

Beweis: Mit der Voraussetzung an ε kann Hilfssatz 5.3.2 angewendet werden. Dieser liefert eine Konstante $E = E(\alpha, \varepsilon) < 4\pi$, sodass die Willmore-Energie jedes $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \le \hat{M}_\alpha^\varepsilon$ durch $\mathcal{W}(u) \le E$ beschränkt ist. Insbesondere erhalten wir nach Satz 5.2.3 eine einzig von α und ε abhängige Schranke an die Ableitung von u. Wählt man nun eine Minimalfolge für M_α^ε, deren Helfrich-Energie unterhalb von $\hat{M}_\alpha^\varepsilon$ liegt, so sind analog zum Beweis von Folgerung 5.2.4 mit Proposition 4.4.3 die Voraussetzungen des Existenzsatzes 4.4.1 erfüllt. Dessen Anwendung liefert einen Minimierer, welcher in $C^\infty([-1,1])$ liegt und somit die Helfrich-Gleichung löst. □

5.3.4 Zylinder als Hilfsfunktion (Existenz von Helfrich-Minimierern II)
Der Vollständigkeit halber diskutieren wir noch den Fall, wenn wir einen Zylinder als Hilfsfunktion verwenden. Die Hilfssätze 5.3.1 und 5.3.2 sind dann für diesen Fall anzupassen.

Seien also zunächst einmal $\alpha > 0$ und $\varepsilon \ge 0$ fest gewählt und $w_\alpha \equiv \alpha$ hier der Zylinder zum Randwert α. Analog zu Hilfssatz 5.3.1 lässt sich das Infimum von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α auch durch

$$M_\alpha^\varepsilon \le \mathcal{H}_\varepsilon(w_\alpha) = \frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon$$

beschränken. Wir wollen nun einen Bereich im (α, ε)-Parameterraum finden, in welchem Funktionen $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \le \mathcal{H}_\varepsilon(w_\alpha)$ dann $\mathcal{W}(u) \le E$ mit einer Konstante $E = E(\alpha, \varepsilon) < 4\pi$ erfüllen. Analog zum Vorgehen im Beweis von Hilfssatz 5.3.2 haben wir nach Folgerung 3.6.3

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(u) &\le \frac{1}{2}\left[\mathcal{H}_\varepsilon(w_\alpha) + \sqrt{\mathcal{H}_\varepsilon(w_\alpha)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon + \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon\right)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon + \left|\frac{\pi}{\alpha} - 4\pi\alpha\varepsilon\right|\right] \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha}\,, & \alpha \le \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \text{ oder } \varepsilon = 0\,, \\ 4\pi\alpha\varepsilon\,, & \alpha > \alpha_*\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Im Fall $\alpha \le \alpha_*$ ist die rechte Seite genau dann kleiner als 4π, wenn $\alpha > \frac{1}{4}$. Im Fall $\alpha > \alpha_*$ muss wiederum $\alpha < \frac{1}{\varepsilon}$ gelten. Das heißt also, dass der Bereich von Parametern $\alpha > \frac{1}{4}$ und

$\varepsilon < \frac{1}{\alpha}$ eine Abschätzung der Willmore-Energie mit Konstanten kleiner als 4π erlaubt. Dieser ist in der Zusammenfassung in Bild 5.3 grafisch dargestellt. Die Existenz von Minimierern des Helfrich-Funktionals zeigt man dann analog zu Satz 5.3.3. ■

5.4. Existenz durch Vergleich mit Zylindern

In [Scholtes, 2011] wurde bereits ein weiterer Bereich gefunden, für welchen die Existenz von Helfrich-Minimierern gezeigt werden konnte. Die dort entwickelte Theorie konzentriert sich auf das Regime, in welchem $\alpha > \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ ist. Der Existenzbeweis basiert auf einem Wechselspiel zwischen einer unteren Schranke an die Elemente einer geeigneten Minimalfolge mit einer oberen Schranke an die ersten Ableitungen dieser. Durch Vergleich der Helfrich-Energie von Funktionen mit geringerer Helfrich-Energie als beim Zylinder, gelingt es, Bedingungen an die Parameter α und ε zu erhalten, für welche sich entsprechende Schranken finden lassen. Wir werden die Resultate hier lediglich zusammenfassen und auf Beweise verzichten.

5.4.1 Hilfssatz
Seien $\alpha > 0$, $\varepsilon \geq 0$ und ein $c \in (0, \alpha)$ gegeben, sodass

$$F(\alpha, \varepsilon, c) := \frac{4\varepsilon\alpha c\,(\alpha - c)}{4\varepsilon\alpha^2 + 1} \geq 1$$

gilt. Dann ist jedes $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$ nach unten beschränkt durch c, sodass $u(x) > c$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Beweis: Für den Beweis siehe [Scholtes, 2011, Lemma 4.5]. □

5.4.2 Hilfssatz
Seien $\varepsilon > 0$, $\alpha > \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ und ein c mit $\alpha_* \leq c < \alpha$ gegeben, sodass

$$G(\alpha, \varepsilon, c) := \left[\frac{1}{c}\left(4\varepsilon\,(\alpha - c) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c}\right)\right)\right]^{-1/2} > 1$$

erfüllt ist. Erfüllt ein $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$ die Bedingung $u\sqrt{1 + u'^2} \geq c$, so gilt

$$\left|u'(x)\right| \leq \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}} \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1]\,,$$

wobei $K = G(\alpha, \varepsilon, c)^{-1}$.

Beweis: Der Beweis in [Scholtes, 2011, Lemma 4.9] wurde für nicht zwangsweise gerade Funktionen u mit leicht abgeänderter Definition der Funktion G geführt, beinhaltet allerdings auch, mit einer kleinen Modifikation, den Beweis des Hilfssatzes. Dieser lässt sich aber auch in [Scholtes, 2009, Proposition 8.3.8] nachlesen. □

Mit den Schranken aus den Hilfssätzen 5.4.1 und 5.4.2 lässt sich wiederum die Existenz von Helfrich-Minimierern in einem entsprechenden Bereich zeigen. Dieser Bereich ist in der Zusammenfassung in Bild 5.3 grafisch dargestellt.

5.4.3 Satz (Existenz von Helfrich-Minimierern III)
Seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha > \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ gegeben. Ist

$$1 < \sup_{\alpha_* \leq c < \alpha} \min\big\{F(\alpha,\varepsilon,c)\,,\, G(\alpha,\varepsilon,c)\big\} \tag{5.2}$$

erfüllt, so gibt es einen Minimierer u von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α, welcher in $C^\infty([-1,1])$ liegt und das Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$ löst.

Weiter gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$, sodass für alle $\alpha \geq \alpha_0$ die Bedingung (5.2) erfüllt und damit die Existenz eines Helfrich-Minimierers gesichert ist.

Beweis: Der Beweis des ersten Teils ist nach [Scholtes, 2011, Theorem 4.14]. Die Abbildung

$$c \mapsto \min\big\{F(\alpha,\varepsilon,c)\,,\, G(\alpha,\varepsilon,c)\big\}$$

ist als Minimum stetiger Funktionen wieder stetig. Diese nimmt wegen $F(\alpha,\varepsilon,\alpha) = 0$ auf $[\alpha_*,\alpha)$ das Supremum in einem Punkt c_0 an. Nach Voraussetzung ist dann

$$\min\big\{F(\alpha,\varepsilon,c_0)\,,\, G(\alpha,\varepsilon,c_0)\big\} > 1\,.$$

Wir wählen nun eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für M_α^ε mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 5.4.1 gilt dann $u_k\sqrt{1+u_k'^2} \geq u_k > c_0$, sodass sich Hilfssatz 5.4.2 anwenden lässt. Dieser liefert eine von k unabhängige Schranke an die Ableitungen u_k'. Mit Proposition 4.4.3 sind dann wieder die Voraussetzungen des Existenzsatzes 4.4.1 erfüllt, welcher das gesuchte Minimum liefert. Den Beweis zum zweiten Teil der Behauptung liest man in [Scholtes, 2011, Lemma 4.16] nach. □

Wir geben hier noch eine Alternative für Hilfssatz 5.4.1 an, mit welcher sich der Existenzbereich im Satz 5.4.3 noch ein wenig vergrößern lässt.

5.4.4 Hilfssatz
Seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha > \alpha_*$ gegeben. Ist zusätzlich $\alpha > 2$, so gilt für jedes $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$

$$u(x) \geq \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}\;\alpha \qquad \textit{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

Beweis: Die untere Schranke bekommen wir durch Anwendung der Flächenabschätzung aus Folgerung 3.6.4. Analog zur Anwendung der Willmore-Abschätzung aus Folgerung 3.6.3 im Beweis von Hilfssatz 5.3.2 merken wir hier an, dass die Flächenabschätzung auch im Kontext H^2-glatter Profilkurven gültig bleibt. Sei also $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$. Wir erhalten dann

$$\mathcal{A}(u) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left[\mathcal{H}_\varepsilon(u_0) + \sqrt{\mathcal{H}_\varepsilon(u_0)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\;\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon + \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon\right)^2 - 16\pi^2\varepsilon}\,\right] \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\pi}{\alpha} + 4\pi\alpha\varepsilon + \left|\frac{\pi}{\alpha} - 4\pi\alpha\varepsilon\right|\right] \\
&\overset{\alpha\geq\alpha_*}{=} 4\pi\alpha\,.
\end{aligned}
$$

Angenommen, dass $\min_{x\in[-1,1]} u(x) = \min_{x\in[0,1]} u(x) < \lambda_\downarrow\,\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{\alpha}}\,\alpha$, dann haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(u) \;&=\; 4\pi\int_0^1 u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\mathrm{d}x \;\geq\; 4\pi\int_0^1 u(x)\,\left|u'(x)\right|\;\mathrm{d}x \;=\; 4\pi\int_{\min u}^{\max u} y\;\underbrace{\left|u^{-1}(\{y\})\right|}_{\geq 1}\;\mathrm{d}y \\
&> 4\pi\int_{\lambda_\downarrow\alpha}^{\alpha} y\;\mathrm{d}y \;=\; 2\pi\left(\alpha^2 - \lambda_\downarrow^2\,\alpha^2\right) \;=\; 2\pi\,(1-\lambda_\downarrow^2)\,\alpha^2 \;=\; 4\pi\alpha\,,
\end{aligned}
$$

was der letzten Abschätzung widerspricht. □

Mit Hilfssatz 5.4.4 erhält man dann eine modifizierte Variante von Satz 5.4.3. Der Bereich, in dem nun die Existenz gesichert ist, ist in der Zusammenfassung in Bild 5.3 grafisch dargestellt.

5.4.5 Satz (Existenz von Helfrich-Minimierern IV)
Seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha > \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ gegeben. Sind $\sqrt{1-\frac{2}{\alpha}}\,\alpha \geq \alpha_*$ und

$$
G\left(\alpha, \varepsilon, \sqrt{1-\frac{2}{\alpha}}\;\alpha\right) > 1 \tag{5.3}
$$

erfüllt, so gibt es einen Minimierer u von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α, welcher in $C^\infty([-1,1])$ *liegt und das Dirichlet-Problem der Helfrich-Gleichung* $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$ *löst.*

Beweis: Der Beweis ist ähnlich zu führen wie der Beweis von Satz 5.4.3. Wir stellen fest, dass für $c = \sqrt{1-\frac{2}{\alpha}}\,\alpha$ mit Hilfssatz 5.4.4 die Voraussetzung $u\sqrt{1+u'^2} \geq u \geq c$ aus Hilfssatz 5.4.2 für $u \in H_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 \equiv \alpha)$ erfüllt ist, sodass der restliche Beweis wie in Satz 5.4.3 geführt werden kann. □

5.5. Zusammenfassung und Diskussion der Existenzresultate

Wir konnten in den Kapiteln 5.3 und 5.4 vier Bereiche zusammentragen, für die die Existenz von Helfrich-Minimierern gezeigt werden konnte. Die Ergebnisse sind in Bild 5.3 grafisch dargestellt. Die Bestimmung der Existenzbereiche in der Grafik wurden separat in einem Python-Script realisiert. Dabei basiert die Bestimmung der Existenzbereiche I und II lediglich auf einer Funktionsauswertung (siehe Satz 5.3.3 und Abschnitt 5.3.4). Zur Bestimmung der Existenzbereiche III und IV aus den Sätzen 5.4.3 und 5.4.5 wurden die Gleichungen (5.2) und (5.3) numerisch ausgewertet. Dazu wurden Minimierung und Nullstellenberechnung mittels Funktionen der Python-Bibliothek SciPy realisiert.

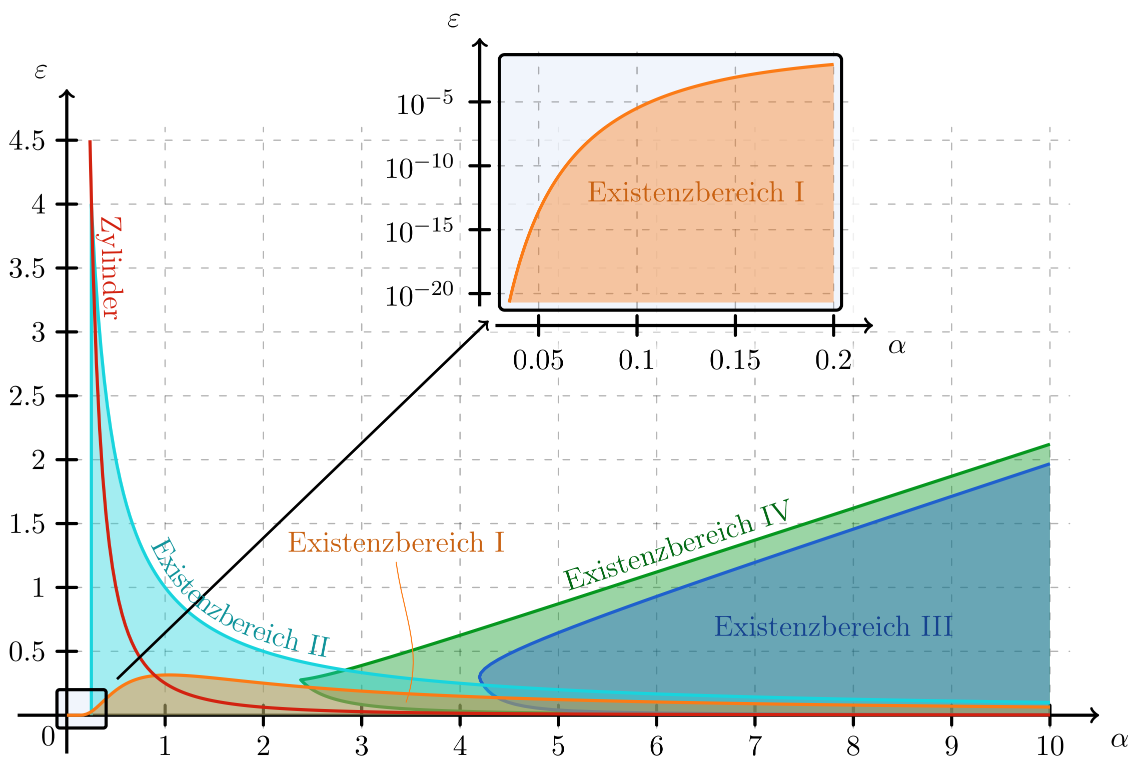


Bild 5.3: Ausschnitte der Existenzbereiche I, II, III und IV im (α, ε)-Parameterraum, für welche in Satz 5.3.3, in Abschnitt 5.3.4 und in den Sätzen 5.4.3 und 5.4.5 die Existenz von Helfrich-Minimierern gezeigt werden konnte, zusammen mit den Parameterwerten, für die die Gleichgewichtszylinder nach Satz 5.1.1 die eindeutigen Minimierer des Helfrich-Funktionals darstellen. Einzig der Existenzbereich I garantiert für jeden Randwert α die Existenz eines Helfrich-Minimierers.

Die Existenzbereiche I und II basieren auf einer Energie-Methode, bei der mithilfe der Hilfsfunktion aus Abschnitt 5.2.1 bzw. einem Zylinder als Hilfsfunktion die Willmore-Energie für Funktionen mit kleinerer Helfrich-Energie abgeschätzt wird. Lässt sich die Willmore-Energie durch Konstanten kleiner als die Energie-Barriere 4π beschränken, so bekommt man ein Existenzresultat. Dabei ist der Existenzbereich I der einzige der vier Bereiche, welche für alle Werte des Randwertes α, die Existenz von Helfrich-Minimierern zeigen konnte. Die beiden Resultate sind weit davon entfernt, optimal für die Ausnutzung der Energie-Barriere zu sein. Einzig der Existenzbereich II stellt für Gleichgewichtszylinder das optimale Resultat dar, in der Hinsicht, dass Gleichgewichtszylinder mit Randwerten $\alpha \leq \frac{1}{4}$ oberhalb der Energie-Barriere sind. Die numerischen Experimente in Kapitel 6.1 zeigen, dass Helfrich-Minimierer in Bereichen größerer α aber nicht allzu großer ε weiterhin unterhalb der Energie-Barriere liegen (vgl. Bild 6.2). Die beiden Existenzbereiche I und II scheinen diese Bereiche allerdings nicht „spüren“ zu können. Eventuell können die Resultate noch verbessert werden, wenn sich die Abschätzungen aus Satz 3.6.1 bzw. aus Folgerung 3.6.3 verbessern lassen. Eine Idee könnte es sein, die Abschätzung aus Folgerung 3.6.3 durch Rücksichtnahme der Randwerte zu verbessern, um Profilkurven ausschließen zu können, die die schlechte Abschätzung der Fläche verursachen.

Die Existenzbereiche III und IV wurden wiederum aus Vergleichen mit Zylindern gewonnen. In [Scholtes, 2011] wurde der Existenzbereich ermittelt, in welchem es die Schranken in den Voraussetzungen des Existenzsatzes 4.4.1 geben muss, da sonst die Helfrich-Energien der Elemente einer Minimalfolge größer als die Helfrich-Energie des Zylinders zum gleichen Randwert werden. Für den Existenzbereich IV konnte das Resultat mit der Flächenabschätzung aus Folgerung 3.6.4 noch unwesentlich verbessert werden. Auch hier könnte sich das Resultat verbessern lassen, würde man die Flächenabschätzung verbessern können.

6. Beschreibung der qualitativen Eigenschaften von Helfrich-Minimierern

Nachdem wir in Kapitel 5 Bereiche von Randwerten α und Flächenanteilen ε des Helfrich-Funktionals finden konnten, für welche sich die Existenz von Helfrich-Minimierern in H_α beweisen ließ, wollen wir uns hier mit den qualitativen Eigenschaften von Helfrich-Minimierern beschäftigen. Dazu werden wir exzessiven Gebrauch eines numerischen Lösungsverfahrens machen, dessen ausführliche Beschreibung in Kapitel 7 zu finden ist. Die Numerik ermöglicht es, uns nicht nur auf die in Kapitel 5 gefundenen Existenzbereiche zu beschränken, sondern auch Parameterpaare (α, ε) zu betrachten, welche einer theoretischen Analyse bisher nicht zugänglich sind. Die Diskussion wird aus diesem Grund in diesem Kapitel größtenteils eher informell sein und nur an wenigen Stellen rigoros geführt.

Für die qualitative Beschreibung werden wir zunächst in Kapitel 6.1 das Verhalten der Werte des Helfrich-, Willmore- und Flächenfunktionals der Helfrich-Minimierer in Abhängigkeit der Randwerte α und Flächenanteile ε betrachten. Neben Monotonie-Resultaten der *optimalen* Helfrich-Energien betrachten wir auch das Verhalten für $\varepsilon \to \infty$ und $\alpha \to \infty$. Konvergenzresultate der Helfrich-Minimierer in den Situationen $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to \infty$ und $\alpha \to 0$ werden dann in Kapitel 6.2 diskutiert. Letztendlich fallen in der numerischen Beschreibung zwei Charakteristiken der Helfrich-Minimierer auf, welche unter anderem eine theoretische Analyse dieser erschweren. Zum einen gibt es eine Kurve im (α, ε)-Parameterraum, an der ein unstetiger Übergang der numerisch gefundenen Helfrich-Minimierer stattfindet, was in Kapitel 6.3 untersucht wird. Andererseits erschwert das komplizierte Monotonie-Verhalten der numerischen Helfrich-Minimierer die theoretische Analyse. Darauf werden wir dann in Kapitel 6.4 eingehen.

Zugunsten eines inhaltlichen roten Fadens werden hier numerische und theoretische Resultate im Text gemischt vorkommen. Wir versuchen, diese stets einzuordnen, und sofern ein Resultat oder eine Lösung der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) als „numerisch“ beschrieben wird, ist damit die Verwendung des numerischen Lösungsverfahrens aus Kapitel 7 gemeint.

6.1. Energien der Minimierer

In diesem Kapitel wollen wir das Verhalten der verschiedenen Energien bzw. Flächenwerte der Helfrich-Minimierer in Abhängigkeit von α und ε diskutieren. Dabei interessieren wir uns unter anderem für das Monotonieverhalten der *optimalen Helfrich-Energie* sowie das Grenzverhalten für $\varepsilon \to \infty$ und $\alpha \to \infty$.

Wir versuchen zunächst, das Verhalten der **optimalen Helfrich-Energie** M_α^ε, also der Helfrich-Energien der jeweiligen Helfrich-Minimierer, in Abhängigkeit von α und ε zu beschreiben. Bild 6.1 stellt diese optimalen Helfrich-Energien, welche für die mit der Finite-Elemente-Methode aus

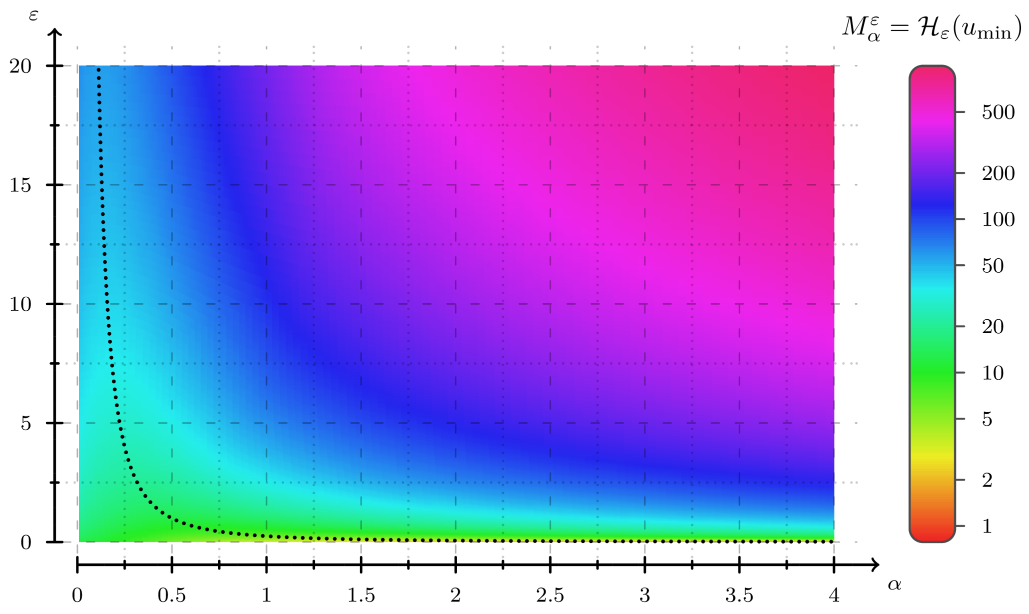


Bild 6.1: Darstellung der numerisch berechneten optimalen Helfrich-Energien für einen Bereich im (α, ε)-Parameterraum. Die gepunktete Linie kennzeichnet den Bereich $\alpha = \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, in dem Gleichgewichtszylinder das Helfrich-Funktional nach Satz 5.1.1 minimieren.

Kapitel 7 gefundenen numerischen Helfrich-Minimierer berechnet wurden, dar. Als Funktion in ε stellt sich diese als monoton heraus, wie folgender Hilfssatz zeigt.

6.1.1 Hilfssatz (Monotonie von $\varepsilon \mapsto M_\alpha^\varepsilon$)
Für festes $\alpha > 0$ ist die Funktion

$$[0, \infty) \ni \varepsilon \mapsto M_\alpha^\varepsilon = \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(u)$$

monoton steigend.

Beweis: Seien $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gegeben. Wir wählen ein beliebiges $u \in H_\alpha$. Wegen $\mathcal{A}(u) > 0$ haben wir

$$\varepsilon_1 \mathcal{A}(u) < \varepsilon_2 \mathcal{A}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W}(u) + \varepsilon_1 \mathcal{A}(u) < \mathcal{W}(u) + \varepsilon_2 \mathcal{A}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}_{\varepsilon_1}(u) < \mathcal{H}_{\varepsilon_2}(u)\,.$$

Infimumbildung liefert dann

$$M_\alpha^{\varepsilon_1} = \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}(u) \leq \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{H}_{\varepsilon_2}(u) = M_\alpha^{\varepsilon_2}\,.$$

□

Analog lässt sich auch Monotonie der optimalen Energien des „invertierten“ Helfrich-Funktionals zeigen, bei dem die Rollen von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{A}$ vertauscht sind. Wir setzen dazu für $\tilde{\varepsilon} \geq 0$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}}(u) := \mathcal{A}(u) + \tilde{\varepsilon}\, \mathcal{W}(u) \overset{\text{falls } \tilde{\varepsilon} > 0}{=} \tilde{\varepsilon}\, \mathcal{H}_{1/\tilde{\varepsilon}}(u)\,.$$

Die Minimierer von $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}}$ stimmen dann mit den Minimierern von $\mathcal{H}_{1/\tilde{\varepsilon}}$ in den jeweiligen Klassen H_α überein. Betrachten wir ferner

$$\tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}} := \inf_{u \in H_\alpha} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}}(u) = \tilde{\varepsilon} \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{H}_{1/\tilde{\varepsilon}}(u) = \tilde{\varepsilon} M_\alpha^{1/\tilde{\varepsilon}},$$

so lässt sich auch die Monotonie von $\tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}}$ in Abhängigkeit von $\tilde{\varepsilon}$ zeigen. Das zeigt auch, dass $M_\alpha^{1/\tilde{\varepsilon}}$ in $\tilde{\varepsilon}$ langsamer fällt, als $\tilde{\varepsilon}$ wächst.

6.1.2 Hilfssatz (Monotonie von $\tilde{\varepsilon} \mapsto \tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}}$)

Für festes $\alpha > 0$ ist die Funktion

$$[0, \infty) \ni \tilde{\varepsilon} \mapsto \tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}} = \inf_{u \in H_\alpha} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}}(u) = \tilde{\varepsilon} M_\alpha^{1/\tilde{\varepsilon}}$$

monoton steigend.

Beweis: Seien $0 \leq \tilde{\varepsilon}_1 < \tilde{\varepsilon}_2$ gegeben und wir wählen ein beliebiges $u \in H_\alpha$. Wegen $\mathcal{W}(u) \geq 0$ in H_α haben wir

$$\tilde{\varepsilon}_1 \mathcal{W}(u) \leq \tilde{\varepsilon}_2 \mathcal{W}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}(u) + \tilde{\varepsilon}_1 \mathcal{W}(u) \leq \mathcal{A}(u) + \tilde{\varepsilon}_2 \mathcal{W}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}_1}(u) \leq \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}_2}(u).$$

Infimumbildung liefert dann

$$\tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}_1} = \inf_{u \in H_\alpha} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}_1}(u) \leq \inf_{u \in H_\alpha} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\varepsilon}_2}(u) = \tilde{M}_\alpha^{\tilde{\varepsilon}_2}.$$

□

Das Monotonie-Verhalten für M_α^ε in Abhängigkeit von α unterscheidet sich allerdings ein wenig von dem Monotonieverhalten von M_α^ε in ε. Während nach [Scholtes, 2011] die Abbildung $\alpha \mapsto M_\alpha^\varepsilon$ für hinreichend große α monoton steigend ist und sogar strikt monoton steigend, sofern ein Minimierer mit Randwert α existiert, so gilt dies nicht mehr für kleine Werte von α. Nach Satz 5.1.1 gilt nämlich, dass $M_{\alpha_*}^\varepsilon$ ein striktes Minimum von $\alpha \mapsto M_\alpha^\varepsilon$ ist. Demnach muss $M_\alpha^\varepsilon > M_{\alpha_*}^\varepsilon$ für $\alpha < \alpha_*$ sein. Dies kann man auch in den numerischen Ergebnissen in Bild 6.1 erahnen.

Nicht nur gelten für M_α^ε die beschriebenen Monotonie-Eigenschaften. Ferner lässt sich auch zeigen, dass M_α^ε in den Grenzfällen $\varepsilon \to \infty$ und $\alpha \to \infty$ beliebig groß werden kann. Allerdings sei darauf hingewiesen, dass dies nicht für das Willmore-Funktional, also für $\varepsilon = 0$, gilt. Nach Hilfssatz 5.2.2 konvergiert $M_\alpha = M_\alpha^0$ für $\alpha \to \infty$ gegen 0.

6.1.3 Hilfssatz

Für festes $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} M_\alpha^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to \infty} \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v) = \infty$$

und für $\varepsilon > 0$ hingegen haben wir

$$\lim_{\alpha \to \infty} M_\alpha^\varepsilon = \lim_{\alpha \to \infty} \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v) = \infty.$$

Beweis: Der Beweis der Behauptung basiert auf einer geeigneten Flächenabschätzung. Sei α zunächst beliebig aber fest. Für beliebiges $u \in H_\alpha$ rechnen wir einerseits analog zum Beweis von Hilfssatz 5.4.4

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u) \;&=\; 4\pi \int_0^1 u(x)\,\sqrt{1+u'(x)^2}\;\mathrm{d}x \;\geq\; 4\pi \int_0^1 u(x)\,\big|u'(x)\big|\;\mathrm{d}x \;=\; 4\pi \int_{\min u}^{\max u} y\;\underbrace{\big|u^{-1}(\{y\})\big|}_{\geq 1}\;\mathrm{d}y\\ &\geq\; 4\pi \int_{\min u}^{\max u} y\;\mathrm{d}y \;=\; 2\pi\Bigg(\Big(\max_{x\in[-1,1]} u(x)\Big)^2 - \Big(\min_{x\in[-1,1]} u(x)\Big)^2\Bigg).\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\mathcal{A}(u) \;=\; 4\pi \int_0^1 u(x)\;\underbrace{\sqrt{1+u'(x)^2}}_{\geq 1}\;\mathrm{d}x \;\geq\; 4\pi \int_0^1 \underbrace{u}_{\geq \min\limits_{x\in[-1,1]} u(x)}\;\mathrm{d}x \;\geq\; 4\pi \min_{x\in[-1,1]} u(x)\,.$$

Die Kombination der beiden Flächenabschätzungen ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u) &\geq 2\pi\,\max\Big\{2\min u\,,\,\max u^2 - \min u^2\Big\}\\ &\geq 2\pi\,\max\Big\{2\min u\,,\,\alpha^2 - \min u^2\Big\} \qquad (6.1)\\ &\geq 4\pi\Big[\sqrt{1+\alpha^2}\,-1\Big]\,,\end{aligned}$$

denn der Ausdruck in den geschweiften Klammern in der zweiten Zeile wird minimal, falls $\min u = \sqrt{1+\alpha^2} - 1$.

Wir zeigen zunächst den ersten Teil der Behauptung. Sei $\alpha > 0$ gegeben. Wir geben uns ein hinreichend kleines $\delta > 0$ vor und wählen für beliebige $\varepsilon > 0$ Funktionen $u_\varepsilon \in H_\alpha$, sodass $\mathcal{H}_\varepsilon(u_\varepsilon) < M_\alpha^\varepsilon + \delta$. So haben wir mit Abschätzung (6.1)

$$4\pi\varepsilon\Big[\sqrt{1+\alpha^2}\,-1\Big] \;\leq\; \mathcal{W}(u_\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}(u_\varepsilon) \;=\; \mathcal{H}_\varepsilon(u_\varepsilon) \;<\; M_\alpha^\varepsilon + \delta\,.$$

Die Grenzwertbetrachtung für $\varepsilon \to \infty$ liefert dann die Behauptung. Analog lässt sich auch der zweite Teil der Behauptung zeigen, da nach der Abschätzung (6.1) $\mathcal{A}(u) \to \infty$ gilt für Randwerte $\alpha \to \infty$. □

Wir gehen nun noch auf die Werte des Willmore- und Flächenfunktionals der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer ein. In Bild 6.2 sind die Willmore-Energien der mit dem numerischen Verfahren aus Kapitel 7 gefundenen Helfrich-Minimierer dargestellt. In der grafischen Darstellung farblich hervorgehoben wurde die in Kapitel 5.2 gefundene Energie-Barriere von 4π. In dem Bild lässt sich erahnen, dass sich die in Kapitel 5.3 gefundenen Existenzbereiche von Helfrich-Minimierern unter Verwendung der dort beschriebenen Energie-Methode noch deutlich erweitern lassen könnten, da die Willmore-Energien der Helfrich-Minimierer für größer werdende α unter diese Energie-Barriere zu fallen scheinen. Weiter lässt sich im Bereich $1 \leq \alpha \leq 1.5$ und $\varepsilon \geq 5$ ein unstetigen Übergang in der Willmore-Energie der Helfrich-Minimierer vermuten. Dieser basiert auf einer unstetigen Abhängigkeit der Daten in diesem Bereich, auf welche wir in Kapitel 6.3 weiter eingehen werden.

In Bild 6.3 sind dann die ebenso durch das numerische Verfahren aus Kapitel 7 berechneten

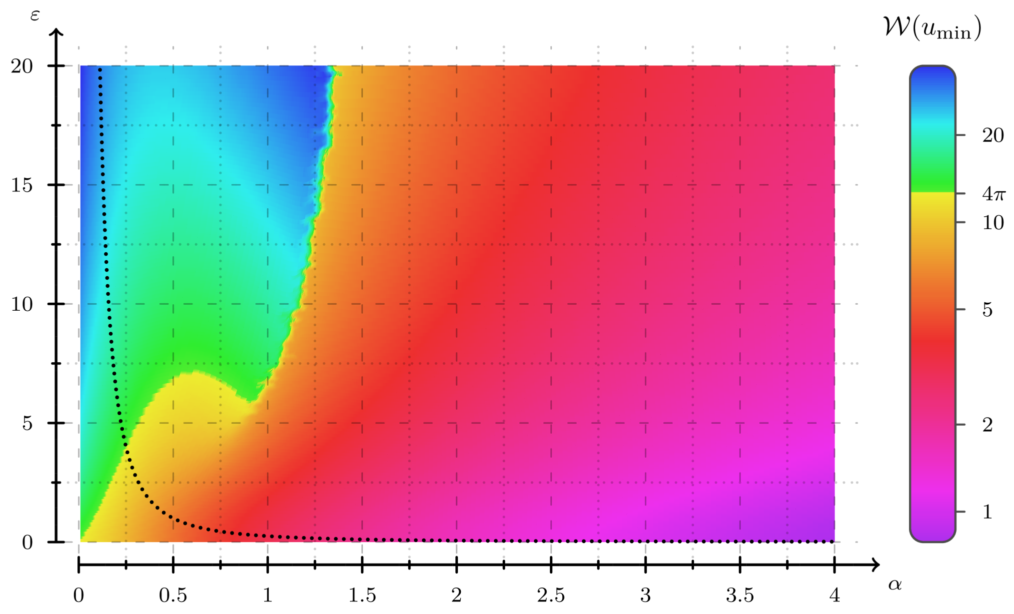


Bild 6.2: Darstellung der Willmore-Energien der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer in Abhängigkeit von α und ε. Die gepunktete Linie kennzeichnet den Bereich $\alpha = \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, in dem Gleichgewichtszylinder das Helfrich-Funktional nach Satz 5.1.1 minimieren.

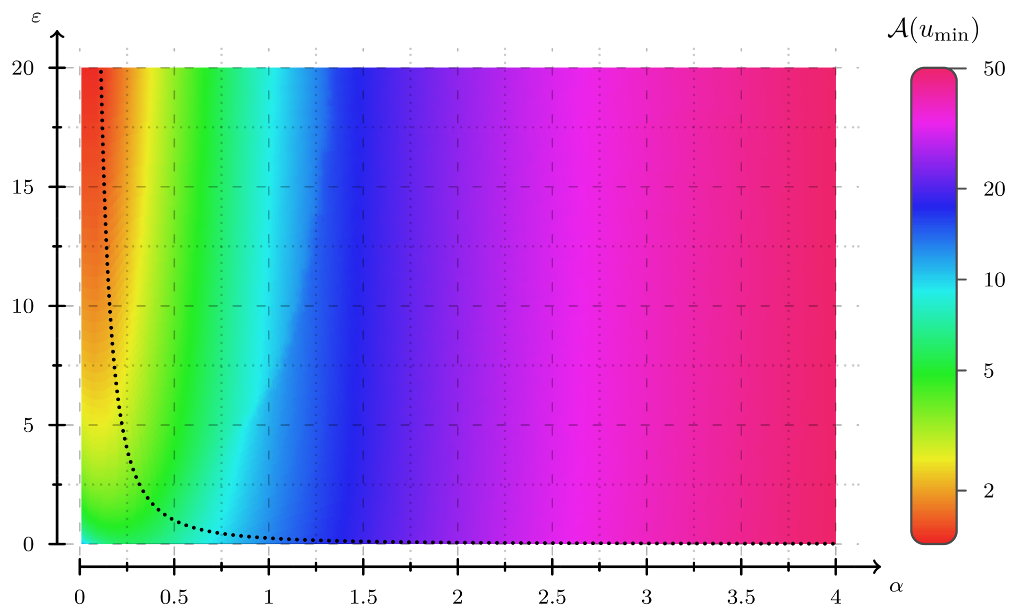


Bild 6.3: Darstellung der Flächenwerte der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer für einen Bereich im (α, ε)-Parameterraum. Die gepunktete Linie kennzeichnet den Bereich $\alpha = \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, in dem Gleichgewichtszylinder das Helfrich-Funktional nach Satz 5.1.1 minimieren.

Flächenwerte der Helfrich-Minimierer gezeigt. Die Unstetigkeitsstelle aus Bild 6.2 bei der Willmore-Energie lässt sich auch hier, wenn auch etwas schwächer ausgeprägt, erkennen. Es sei auf einen Vergleich mit der Flächenabschätzung (6.1) hingewiesen, welche zeigt, dass die Flächenwerte für $\alpha \to \infty$ gegen unendlich konvergieren.

6.2. Konvergenzverhalten in Grenzfällen

Interessant ist auch die Frage, ob Helfrich-Minimierer in den Grenzfällen $\varepsilon \searrow 0$ und $\varepsilon \nearrow \infty$ zu Minimierern des Willmore- bzw. Flächenfunktionals konvergieren. Mit dieser Fragestellung werden wir uns hier auseinandersetzen und zudem auch den Fall für $\alpha \to 0$ betrachten. Die Konvergenz zu Willmore-Minimierern werden wir hier rigoros zeigen. Dagegen wird die Diskussion für die Grenzfälle $\varepsilon \to \infty$ und $\alpha \to 0$ anhand der numerischen Ergebnisse eher informell gehalten.

In Satz 5.3.3 konnten wir die Existenz von Helfrich-Minimierern in einem Bereich des (α, ε)-Parameterraumes zeigen, in welchem es für jedes $\alpha > 0$ ein $\tilde{\varepsilon}$ gibt, sodass $0 \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ in diesem Bereich liegt. Wir zeigen nun, dass es in diesem Bereich Helfrich-Minimierer gibt, die für $\varepsilon \to 0$ gegen einen Willmore-Minimierer konvergieren. Da die Eindeutigkeit von Willmore-Minimierern nicht zu erwarten ist (vgl. [Eichmann, 2016]), können wir prinzipiell erst einmal nicht erwarten, dass jede solche Folge von Helfrich-Minimierern konvergent ist.

6.2.1 Satz (Konvergenz zu Willmore-Minimierern)
Für jedes $\alpha > 0$ gibt es zu jeder Folge $\varepsilon_k \to 0$ eine Teilfolge u_{k_j} von Minimierern des Helfrich-Funktionals $\mathcal{H}_{\varepsilon_{k_j}}$ in H_α, welche in $C^1([-1,1])$ gegen einen Minimierer u des Willmore-Funktionals in H_α konvergiert.

Beweis: Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Folge $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, gegeben mit $\varepsilon_k > 0$, sodass die Existenz der Minimierer u_k von $\mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ nach Satz 5.3.3 garantiert ist. Insbesondere können wir annehmen, dass die ε_k durch eine Konstante kleiner als die in Hilfssatz 5.3.2 bestimmte Grenze an ε beschränkt sind. Demnach gibt es eine Konstante $E < 4\pi$, sodass $\mathcal{W}(u_k) \leq E$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sind damit wieder unter der Energie-Barriere von 4π für das Willmore-Funktional und nach Satz 5.2.3 lassen sich die Ableitungen der u_k gleichmäßig mit einer Konstante $c > 0$ beschränken, sodass

$$|u_k'| \leq c \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Analog zu Proposition 4.4.3 lassen sich mit Hilfssatz 4.4.2 wieder Schranken von oben und unten an die Funktionswerte der u_k finden, welche unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ sind. Kombiniert man nun die Monotonie von M_α^ε aus Hilfssatz 6.1.1 mit dem ersten Teil des Beweises von Satz 4.4.1, so erhält man eine Schranke an die H^2-Norm der Folge u_k. Mit der so erhaltenen Kompaktheit der Folge u_k können wir nach Auswahl einer Teilfolge erreichen, dass $u_k \rightharpoonup u$ in $H^2(-1,1)$ für ein $u \in H_\alpha$. Mit der Kompaktheit der Einbettung $H^2(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^1([-1,1])$ erhalten wir dann nach erneuter Auswahl einer Teilfolge $u_k \to u$ in $C^1([-1,1])$. Es bleibt zu zeigen, dass u das Willmore-Funktional $\mathcal{W}$ in H_α minimiert.

Wir nehmen an, dass u kein Minimierer von $\mathcal{W}$ in H_α ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Funktion $\tilde{u} \in H_\alpha$, sodass

$$\mathcal{W}(u) > \mathcal{W}(\tilde{u}) + \delta\,.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{H}_{\varepsilon_k}(u_k) > \mathcal{W}(u_k)\,.$$

Mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit des Willmore-Funktionals bezüglich der H^2-Topologie aus Satz 4.2.1 gilt weiter $\mathcal{W}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{W}(u_k)$. Wählen wir k hinreichend groß, sodass

$$\mathcal{W}(u_k) \geq \mathcal{W}(u) - \frac{\delta}{2} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_k\,\mathcal{A}(\tilde{u}) < \frac{\delta}{2}$$

gelten, so ergibt sich

$$M_\alpha^{\varepsilon_k} = \mathcal{H}_{\varepsilon_k}(u_k) > \mathcal{W}(u_k) \geq \mathcal{W}(u) - \frac{\delta}{2} > \mathcal{W}(\tilde{u}) + \frac{\delta}{2} > \mathcal{W}(\tilde{u}) + \varepsilon_k\,\mathcal{A}(\tilde{u}) = \mathcal{H}_{\varepsilon_k}(\tilde{u})\,,$$

was der Definition von $M_\alpha^{\varepsilon_k}$ als Infimum von $\mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ bezüglich H_α widerspricht. Somit muss u ein Minimierer von $\mathcal{W}$ in H_α sein. □

In den beiden Bildern 6.4 und 6.5 sind Beispiele numerisch berechneter Helfrich-Minimierer,

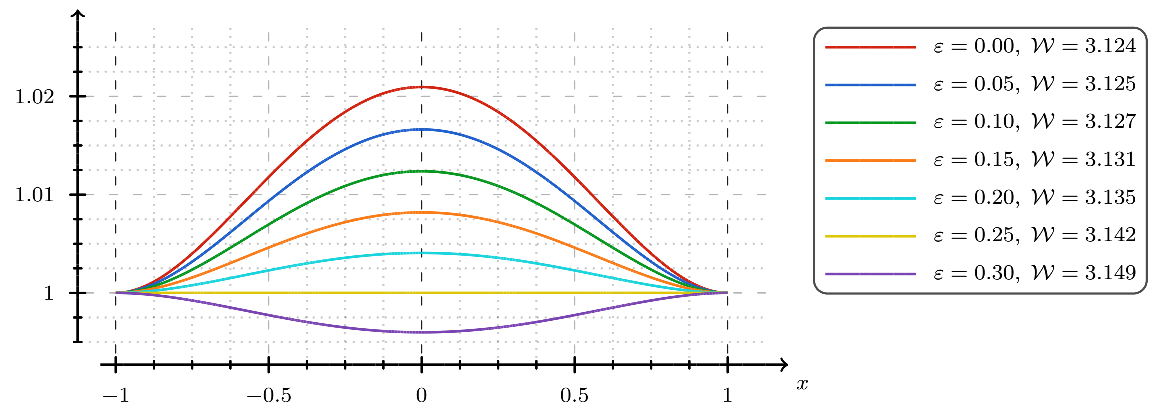


Bild 6.4: Veranschaulichung der Konvergenz von Helfrich-Minimierern gegen einen Willmore-Minimierer im Grenzfall $\varepsilon \searrow 0$ zum Randwert $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$ für verschiedene Flächenanteile ε. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

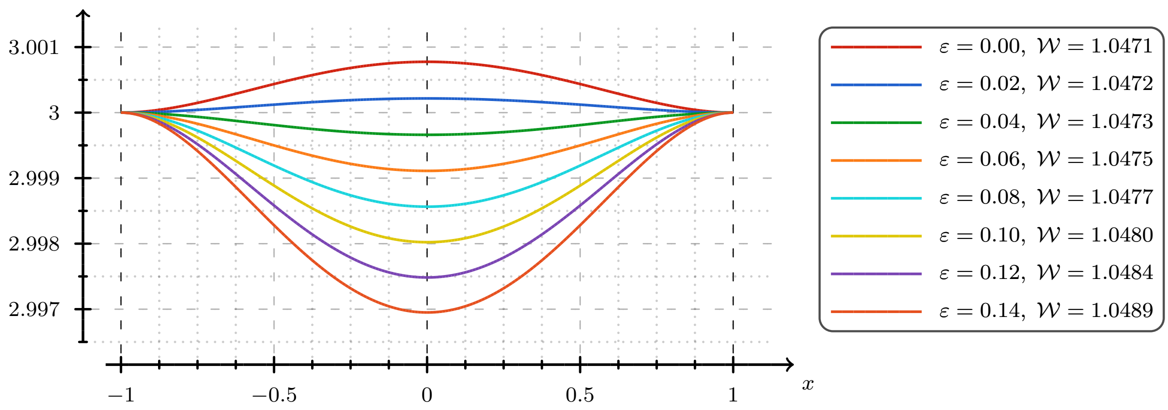


Bild 6.5: Veranschaulichung der Konvergenz von Helfrich-Minimierern gegen einen Willmore-Minimierer im Grenzfall $\varepsilon \searrow 0$ zum Randwert $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{3}$ für verschiedene Flächenanteile ε. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

welche gegen ebenso numerisch bestimmte Willmore-Minimierer konvergieren, bei verschiedenen Randwerten α dargestellt. Die beiden Bilder bestätigen Satz 6.2.1.

Nach der Diskussion axialsymmetrischer Minimalflächen aus Kapitel 3.7 müssen wir im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ die beiden Fälle $\alpha \geq \alpha_m$ und $\alpha < \alpha_m$ unterscheiden. Im Fall $\alpha \geq \alpha_m$ kann man ähnlich vorgehen wie im Beweis von Satz 6.2.1. Für die Analyse des Grenzfalls $\varepsilon \to \infty$ erscheint es wegen $\lim_{\varepsilon\to\infty} M_\alpha^\varepsilon = \infty$ nach Hilfssatz 6.1.3 sinnvoll, das invertierte Helfrich-Funktional $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ aus Kapitel 6.1 zu verwenden.

6.2.2 Proposition (Konvergenz zum flächenminimierenden Katenoid)
Es seien $\alpha > \alpha_m \approx 1.895$ und eine Folge $\varepsilon_k \to \infty$ gegeben. Nehmen wir an, dass es zu jedem k einen Minimierer $u_k \in H_\alpha$ von $\tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k} = \frac{1}{\varepsilon_k}\mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ gibt und eine von k unabhängige Konstante c, sodass

$$|u_k'| \leq c \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

dann konvergiert $u_k \to u$ in $C^0([-1,1])$ gegen das flächenminimierende Katenoid zum Randwert α aus Abschnitt 3.7.1.

Beweisskizze: Prinzipiell können wir ähnlich vorgehen wie im Beweis von Satz 6.2.1. Zu beachten ist, dass das flächenminimierende Katenoid nicht in H_α liegt, sodass wir geeignete Funktionen finden müssen, welche diese approximieren. Sei $\alpha > \alpha_m$. Mit c bezeichnen wir den Katenoid-Parameter des entsprechenden flächenminimierenden Katenoids zum Randwert α (vgl. mit Abschnitt 3.7.1). Wir teilen den Beweis in zwei Schritte ein.

Schritt 1: Approximation des flächenminimierenden Katenoids durch H_α-Funktionen.

Für $\varrho \in (0,1)$ definieren wir die gerade Funktion

$$u_\varrho(x) := \begin{cases} u_c(x)\,, & \text{falls } x \in (-1+\varrho, 1-\varrho)\,, \\ p_\varrho\big(|x|\big)\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $u_c(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ das flächenminimierende Katenoid ist und p_ϱ das eindeutig bestimmte Hermite-Interpolationspolynom mit

$$p_\varrho(1) = u_c(1) = \alpha\,, \quad p_\varrho'(1) = 0\,, \quad p_\varrho(1-\varrho) = u_c(1-\varrho)\,, \quad p_\varrho'(1-\varrho) = u_c'(1-\varrho)\,,$$

welches durch

$$p_\varrho(x) = \big(2\alpha - \varrho\sigma - 2\kappa\big)\left(\frac{1-x}{\varrho}\right)^3 + \big(3\kappa + \varrho\sigma - 3\alpha\big)\left(\frac{1-x}{\varrho}\right)^2 + \alpha$$

gegeben ist mit

$$\kappa = u_c(1-\varrho) = c\cosh\left(\frac{1-\varrho}{c}\right), \qquad \sigma = u_c'(1-\varrho) = \sinh\left(\frac{1-\varrho}{c}\right).$$

Beispiele von u_ϱ für verschiedene Werte von ϱ sind in Bild 6.6 gezeigt. Wir haben per Konstruktion dann $u_\varrho \in C^{1,1}([-1,1]) = W^{2,\infty}(-1,1)$ (vgl. Satz B.3.7) und somit $u_\varepsilon \in H_\alpha$. Weiter kann man

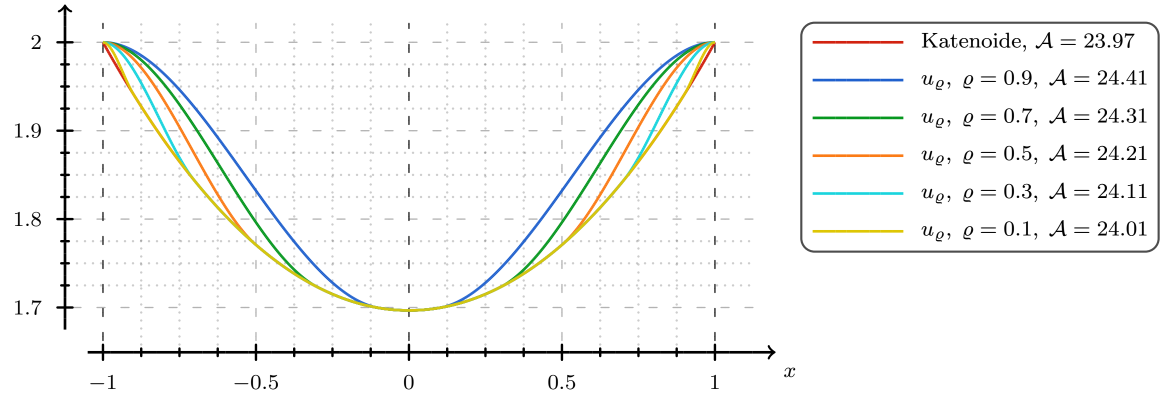


Bild 6.6: Darstellung von Beispielen der Funktion u_ϱ für verschiedene Werte von ϱ zur Approximation des flächenminimierenden Katenoids.

dann zeigen, dass $\|u_c - u_\varrho\|_{C^0} \to 0$ für $\varrho \to 0$ und $\|u_c' - u_\varrho'\|_{C^0} \leq C$ für eine Konstante C unabhängig von ϱ. Und da u_c und u_ϱ auf $(-1+\varrho, 1-\varrho)$ übereinstimmen, folgt insbesondere $u_\varrho \to u_c$ für $\varrho \to 0$ in $H^1(-1,1)$. Nach dem Beweis von Satz 4.2.1 ist das Flächenfunktional stetig bezüglich der H^1-Topologie, sodass man somit auch $\mathcal{A}(u_\varrho) \to \mathcal{A}(u_c)$ für $\varrho \to 0$ erhält.

Schritt 2: Konvergenz von Helfrich-Minimierern zum flächenminimierenden Katenoid.

Seien nun eine Folge $\varepsilon_k \to \infty$ und Minimierer $u_k \in H_\alpha$ von $\mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ gegeben. Als Minimierer von $\mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ sind diese insbesondere auch Minimierer von $\tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k}$ aus Kapitel 6.1 in H_α, sodass

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k}(u_k) \;=\; \tilde{M}_\alpha^{1/\varepsilon_k}\,.$$

Mit der vorausgesetzten Schranke c an die Ableitungen der u_k erhalten wir wie im Beweis von Hilfssatz 4.4.2 bzw. Proposition 4.4.3 eine obere Schranke an die u_k, sodass wir die u_k als beschränkt in $H^1(-1,1)$ annehmen können. Mit der so vorausgesetzten Kompaktheit erhalten wir ein $u \in H^1(-1,1)$, sodass wir nach Auswahl einer Teilfolge $u_k \rightharpoonup u$ in $H^1(-1,1)$ annehmen können. Die Kompaktheit der Einbettung $H^1(-1,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0([-1,1])$ liefert uns dann $u_k \to u$ in $C^0([-1,1])$. Kann man $u = u_c$ zeigen, so folgt die Behauptung, denn würde diese nicht gelten, gäbe es eine Teilfolge der ursprünglichen Folge u_k, welche gegen ein $v \in C^0([-1,1])$, $v \neq u$ konvergiert. Allerdings erfüllt diese Folge auch wieder die Voraussetzungen der Behauptung und somit muss $v = u_c$ sein, was einen Widerspruch liefern würde.

Wir nehmen also an, dass $u \neq u_c$ ist, sodass u nach Kapitel 3.7 kein Minimierer des Flächenfunktionals zum Randwert α sein kann. Dann gib es ein $\delta > 0$, sodass

$$\mathcal{A}(u) \;>\; \mathcal{A}(u_c) + \delta\,.$$

Weiter verwenden wir auch wieder

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k}(u_k) \;\geq\; \mathcal{A}(u_k)\,.$$

Mit der schwachen Folgenstetigkeit des Flächenfunktionals bezüglich der H^1-Topologie (vgl. wieder Beweis von Satz 4.2.1) gilt $\mathcal{A}(u) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}(u_k)$. Wählt man nun ϱ hinreichend klein, sodass für u_ϱ aus Schritt 1

$$\mathcal{A}(u_\varrho) \;<\; \mathcal{A}(u_c) + \frac{\delta}{3}$$

erfüllt ist, und k hinreichend groß, sodass

$$\mathcal{A}(u_k) \;\geq\; \mathcal{A}(u) - \frac{\delta}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\varepsilon_k}\,\mathcal{W}(u_\varrho) \;<\; \frac{\delta}{3}$$

gelten, so bekommt man

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\alpha^{1/\varepsilon_k} \;&=\; \tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k}(u_k) \;\geq\; \mathcal{A}(u_k) \;\geq\; \mathcal{A}(u) - \frac{\delta}{3} \;>\; \mathcal{A}(u_c) + \frac{2\delta}{3} \\ &>\; \mathcal{A}(u_\varrho) + \frac{\delta}{3} \;>\; \mathcal{A}(u_\varrho) + \frac{1}{\varepsilon_k}\,\mathcal{W}(u_\varrho) \;=\; \tilde{\mathcal{H}}_{1/\varepsilon_k}(u_\varrho)\,,\end{aligned}$$

was der Definition von $\tilde{M}_\alpha^{1/\varepsilon_k}$ als Infimum widerspricht. Somit gilt $u = u_c$. $\square$

Um Satz 6.2.2 zu einem Resultat mit der Aussagekraft wie Satz 6.2.1 erweitern zu können, bedarf es, zwei Hindernisse zu überwinden. Zum einen muss die Existenz der Helfrich-Minimierer gesichert werden. Die Numerik scheint eine positive Antwort darauf zu geben. Das zweite Hindernis ist die Schranke an die ersten Ableitungen der Helfrich-Minimierer. Eventuell lässt sich diese Frage sogar aus möglichen Existenzaussagen gewinnen. Bild 6.7 zeigt ein numerisches Beispiel für

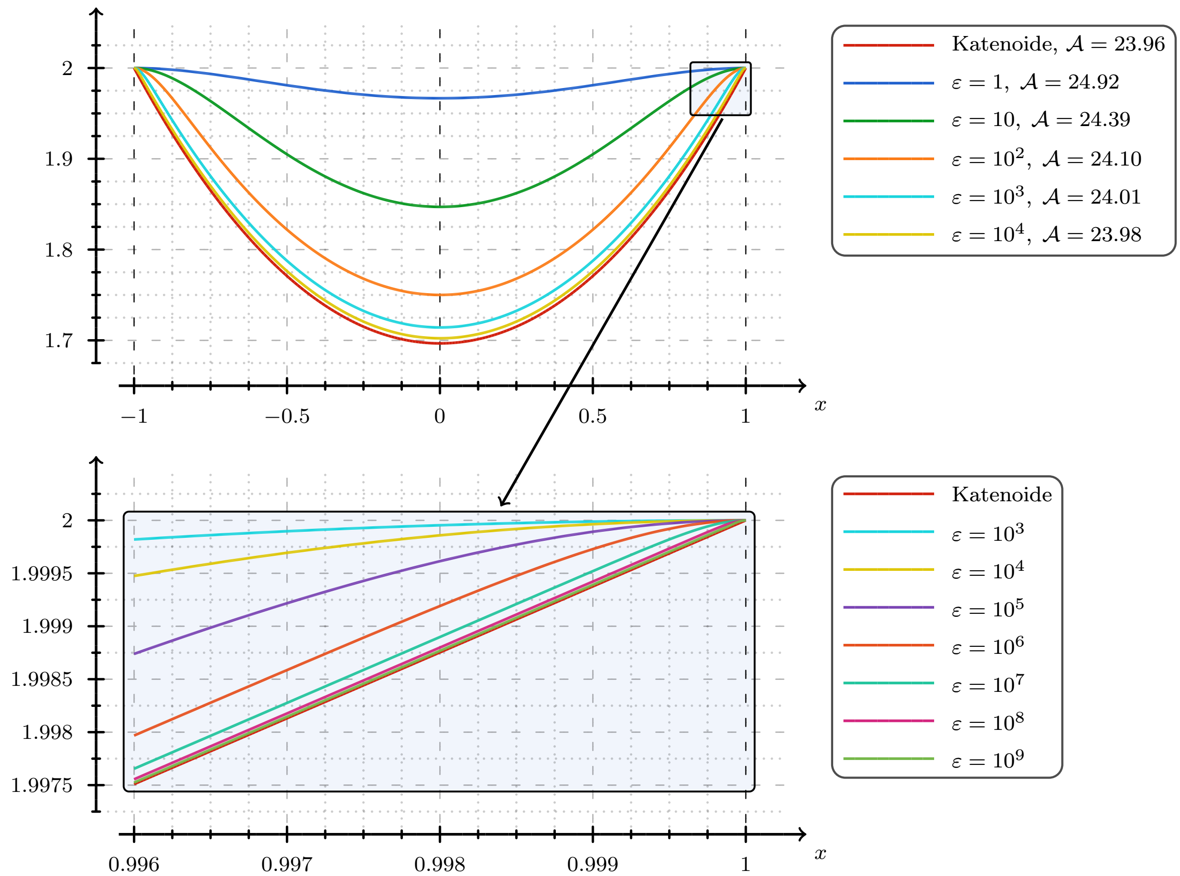


Bild 6.7: Konvergenz von Helfrich-Minimierer zum flächenminimierenden Katenoid im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ zum Randwert $\boldsymbol{\alpha = 2} > \alpha_m$. Das Bild unten verdeutlicht, dass die Ableitungen der Helfrich-Minimierer beschränkt bleiben. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

die Konvergenz gegen ein flächenminimierendes Katenoid und gibt einen Hinweis darauf, dass man eine solche Schranke auch erwarten kann. Die numerischen Helfrich-Minimierer schmiegen sich für größer werdende Werte von ε immer näher an das flächenminimierende Katenoid an, ohne dabei mit beliebig großer Ableitung aus dem Randdatum heraus zu kommen.

Die Diskussion der Konvergenz von Helfrich-Minimierern für $\varepsilon \to \infty$ im Fall von $\alpha < \alpha_m$ werden wir lediglich auf zwei numerische Beispiele reduzieren. Nach dem Monotonie-Resultat aus Hilfssatz 6.1.2 ist zu erwarten, dass die Helfrich-Minimierer mit steigenden Werten von ε bei festem Randwert α gewillt sind, die Flächen zu verringern. Demnach müssten diese im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ die Goldschmidt-Kurve (siehe Abschnitt 3.7.2) zum Randwert α approximieren. Die Bilder 6.8 und 6.9 scheinen diese Vermutung zu bestätigen. Interessant ist auch, dass die Helfrich-Minimierer

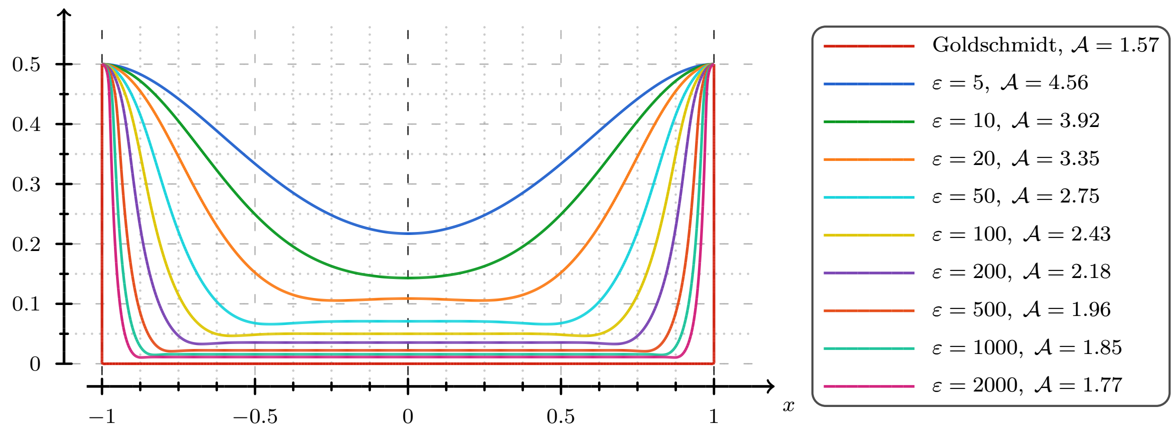


Bild 6.8: Konvergenz von Helfrich-Minimierer zur Goldschmidt-Kurve im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ zum Randwert $\boldsymbol{\alpha = 0.5} < \alpha_m$. Alle Helfrich-Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

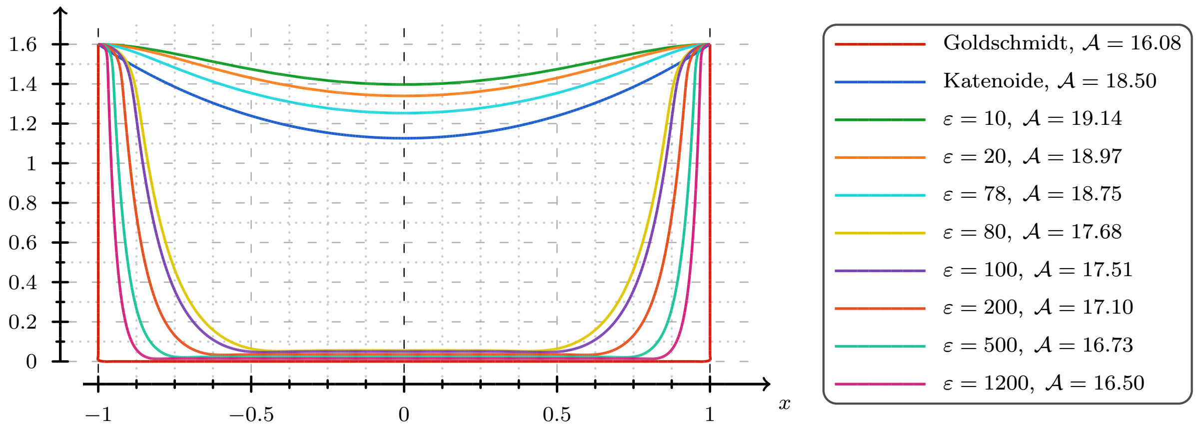


Bild 6.9: Konvergenz von Helfrich-Minimierer zur Goldschmidt-Kurve im Grenzfall $\varepsilon \to \infty$ zum Randwert $\boldsymbol{\alpha = 1.6} < \alpha_m$. Bei $\varepsilon \approx 79$ tritt ein unstetiger Übergang der Minimierer auf. Alle Helfrich-Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

in Bild 6.9 zunächst versuchen das flächenminimierende Katenoid zu approximieren, dann aber ab einem bestimmten Punkt „springen“, um die Goldschmidt-Kurve approximieren zu können.

Diese Beobachtung weist auf eine Unstetigkeit der Helfrich-Minimierer bei stetiger Variation in ε hin, welche bereits in den Bildern 6.2 und 6.3 erahnt werden konnte und in Kapitel 6.3 besprochen wird. Des Weiteren erkennt man auch bereits, dass numerische Helfrich-Minimierer auftauchen, welche auf $[0, 1]$ monoton sind. Andererseits scheint sich dieses Monotonieverhalten bei größeren Werten von ε zu ändern und die Ableitungen der numerischen Helfrich-Minimierer besitzen wechselnde Vorzeichen. In Kapitel 6.4 wird dies ausführlicher diskutiert.

Wir diskutieren als letzten Grenzfall noch den Grenzfall $\alpha \to 0$. Nach [Dall'Acqua et al., 2011, Theorem 5.8] ist bekannt, dass Minimierer des Willmore-Funktionals für Randwerte $\alpha \to 0$ gegen die Einheitssphäre konvergieren. In Bild 6.10 ist dies mit numerisch ermittelten Minimierern

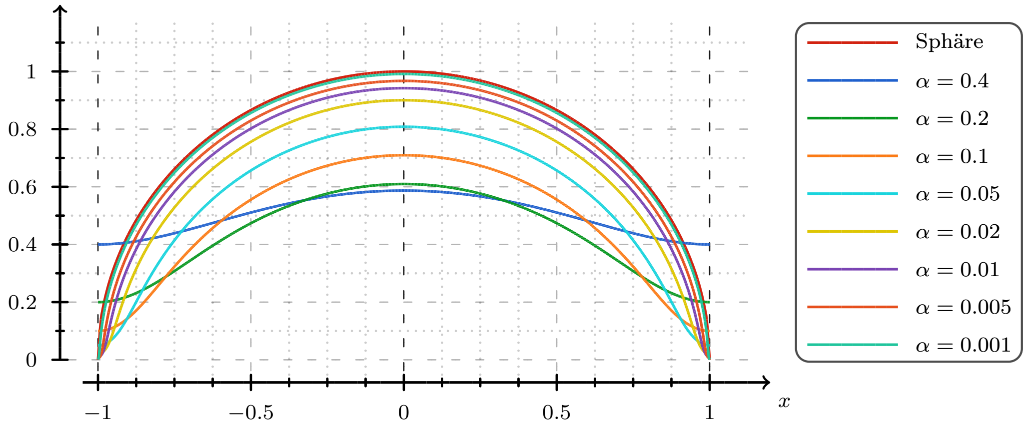


Bild 6.10: Konvergenz von Minimierern des Willmore-Funktionals, bzw. des Helfrich-Funktionals für $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$, zur Einheitssphäre im Grenzfall $\alpha \to 0$. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

des Willmore-Funktionals grafisch dargestellt. Bild 6.11 wiederum zeigt ein Beispiel für die

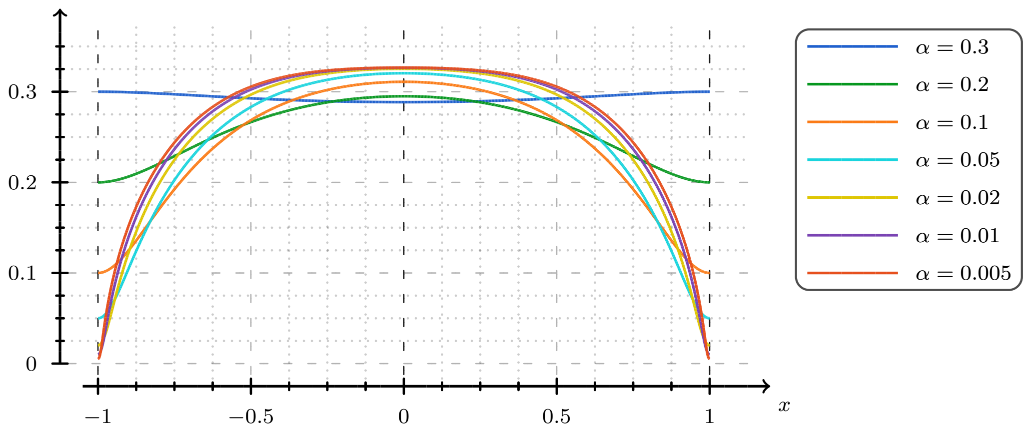


Bild 6.11: Konvergenz von Helfrich-Minimierern zu $\boldsymbol{\varepsilon = 3}$ im Grenzfall $\alpha \to 0$ der Randwerte. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

Konvergenz von numerisch berechneten Helfrich-Minimierern für relativ kleine Flächenanteile ε. Qualitativ scheint sich die Konvergenz ähnlich zu verhalten. Man ist versucht, die Grenzfunktion als gestauchte Sphäre zu interpretieren. Dass dies allerdings nicht für alle Flächenanteile ε der Fall ist, zeigt Bild 6.12. Dort erkennt man, dass der Bereich um $x = 0$ stärker „eingedrückt" ist, als

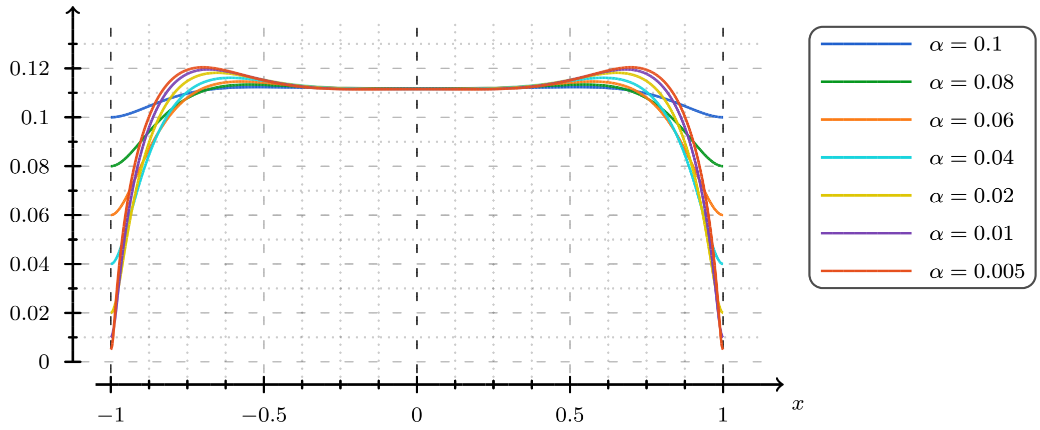


Bild 6.12: Konvergenz von Helfrich-Minimierern zu $\boldsymbol{\varepsilon = 20}$ im Grenzfall $\alpha \to 0$ der Randwerte. Alle Minimierer wurden hier numerisch ermittelt.

der Bereich um $x \approx \pm\frac{3}{4}$ herum. Im Grenzfall $\alpha \to 0$ lassen sich die Helfrich-Minimierer als (fast) geschlossene Rotationsflächen auffassen. Die Form der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer aus Bild 6.12 erinnern dann ein wenig an Querschnitte roter Blutkörperchen (vgl. Bild 6.13). Der Ähnlichkeit ist nicht unbegründet, denn in den Pionierarbeiten zur Modellierung elastischer

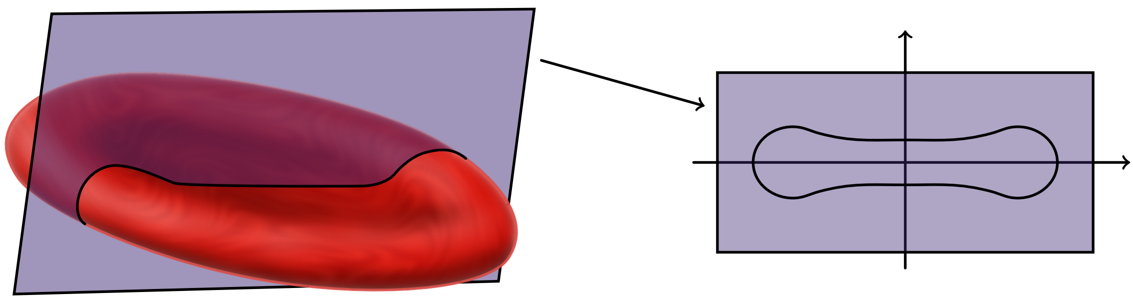


Bild 6.13: Illustration des Querschnitts eines roten Blutkörperchens.

Energien, für welche das Helfrich-Funktional ein einfaches Beispiel ist, war man unter anderem an der Form roter Blutkörperchen interessiert (siehe [Canham, 1970] oder [Deuling und Helfrich, 1976]).

6.3. Unstetige Abhängigkeit von den Daten

Wie bereits in der Diskussion zu den Bildern 6.2 und 6.9 angedeutet wurde, scheinen die Helfrich-Minimierer im Allgemeinen nicht stetig von den Randwerten α und Flächenanteilen ε abzuhängen. Wir wollen die Behauptung hier weiter untermauern und die Beobachtungen ausführlicher beschreiben. Es sei darauf hingewiesen, dass die Interpretation der Ergebnisse in diesem Kapitel rein auf Basis der numerischen Resultate geschieht.

Zunächst einmal geben wir einen besseren Überblick über den Bereich der Unstetigkeit, da dieser in Bild 6.2 nicht sehr gut zu erkennen ist. Als Verzweigungsparameter bietet es sich an, die Funktionswerte der Helfrich-Minimierer an der Stelle $x = 0$ zu verwenden. Bild 6.14 zeigt

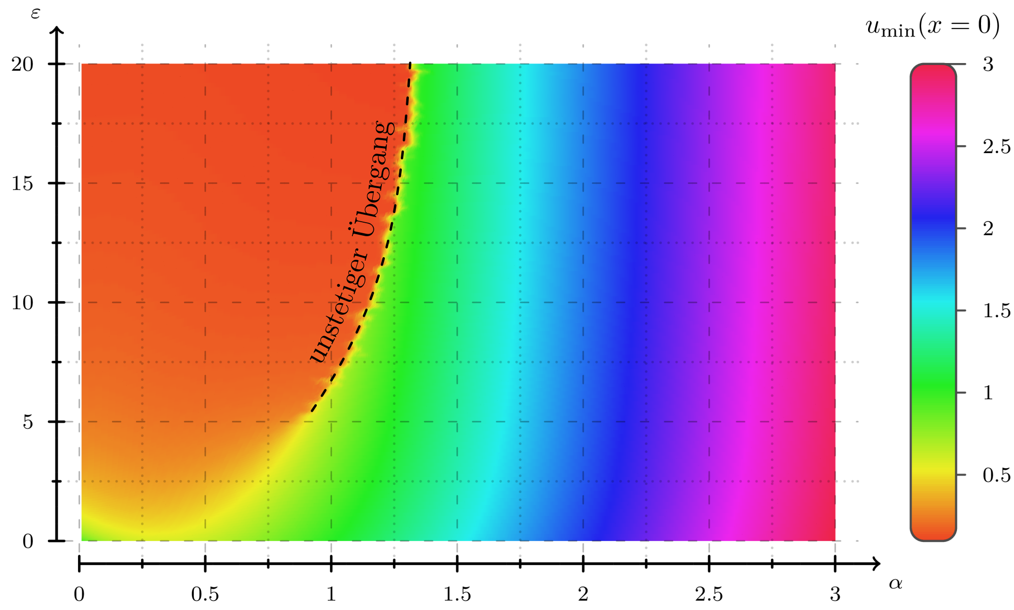


Bild 6.14: Funktionswerte $u(0)$ der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer für einen Bereich im (α, ε)-Parameterraum mit eingezeichneter Grenzlinie, bei welcher ein unstetiger Übergang der numerisch berechneten Helfrich-Minimier beobachtet wurde.

eine Übersicht dieser Werte der numerisch ermittelten Helfrich-Minimierer in Abhängigkeit von α und ε. Zu erkennen ist, dass es für Werte $\alpha \gtrsim 0.8$ und $\varepsilon \gtrsim 5$ eine Grenzlinie gibt, an der ein unstetiger Übergang der Helfrich-Minimierer zu existieren scheint. Nach Proposition 6.2.2 und der ihr folgenden Diskussion lässt sich vermuten, dass diese Grenzlinie den Randwert $\alpha = \alpha_m$ mit $\alpha_m \approx 1.895$ aus Kapitel 3.7 nicht überschreiten wird und für beliebig große ε existiert. In Bild 6.14 scheint die Grenzlinie sehr verrauscht zu sein, was wahrschweinlich an der numerischen Auflösung der berechneten Minimierer liegt. Zu erwarten ist eine glatte Grenzlinie. Der Verlauf der Werte von $u(x = 0)$ der Helfrich-Minimierer für fest gewählte Werte von α in der Nähe des unstetigen Übergangs ist in Bild 6.15 anhand von drei numerischen Beispielen dargestellt.

Der unstetige Übergang lässt sich folgendermaßen erklären. Das hier verwendete numerische Verfahren, welches in Kapitel 7 beschrieben wird, zeigt, dass es durchaus mehrere Lösungen des Dirichlet-Problems $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$ der Helfrich-Gleichung geben kann (vgl. mit Bild 7.7). Insbesondere im Bereich der in Bild 6.14 beobachteten Grenzlinie lassen sich mindestens zwei numerische Lösungen der Helfrich-Gleichung finden, von der eine ein Helfrich-Minimierer zu sein scheint. An der Grenzlinie tauschen beide Lösungen dann ihre Rollen. Die Lösungen, welche nun keine Minimierer mehr sind, lassen sich aber dennoch weiter als Lösungen der Helfrich-Gleichung feststellen. So ist in Bild 6.16 eine Situation dargestellt, in welcher numerische Lösungen bei festem α für zwei verschiedene Werte von ε berechnet wurden, sodass die numerischen Helfrich-Minimierer sich qualitativ unterscheiden, es aber dennoch nicht-minimierende Lösungen gibt,

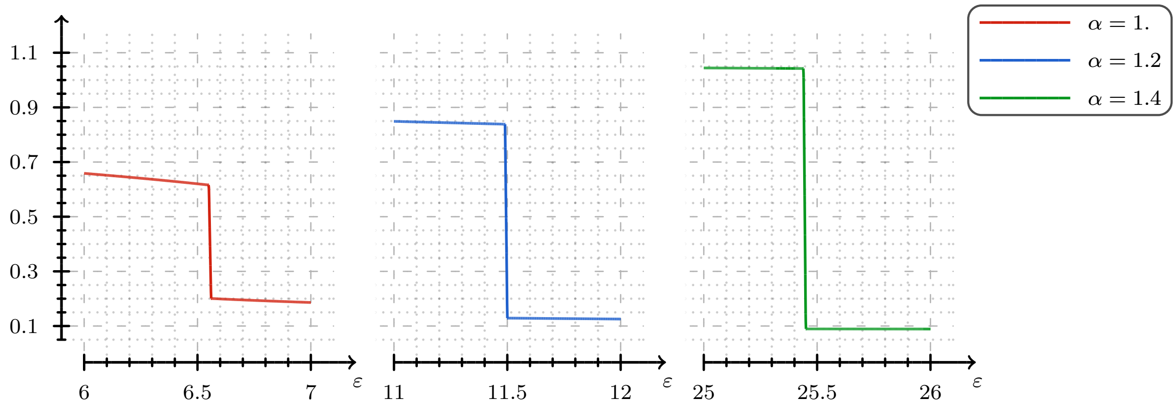


Bild 6.15: Verlauf der Funktionswerte $u(0)$ der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer bei verschiedenen Werten von α in der Nähe des unstetigen Übergangs.

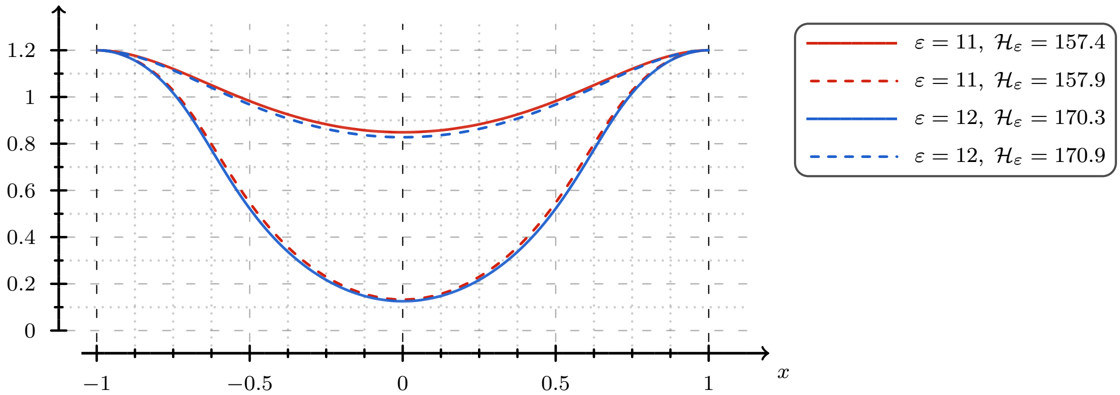


Bild 6.16: Dargestellt sind numerische Lösungen der Helfrich-Gleichung zum Randwert $\alpha = 1.2$ für Flächenanteile $\varepsilon = 11$ (rot) und $\varepsilon = 12$ (blau). Es findet ein Übergang der Minimierer (durchgezogene Linie) hin zu nicht-minimierenden Lösungen (gestrichelte Linie) der Helfrich-Gleichung statt.

welche qualitativ ähnlich den Minimierern sind.

Die optimale Helfrich-Energie verhält sich bei dem Übergang stetig, was in Bild 6.17 dargestellt ist und auch der Grund dafür ist, warum sich die Grenzlinie in Bild 6.1 nicht erkennen lässt. Dies gilt dann allerdings nicht mehr für die Willmore-Energien und die Flächen der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer.

6.4. Verlauf und Monotonieverhalten von Helfrich-Minimierern

Nachdem sich in den Bildern aus Kapitel 6.2 bereits einige Eigenschaften der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer erkennen lassen konnten, wollen wir diese hier nun etwas systematischer beschreiben. Insbesondere geben wir einen Überblick über die Form und das Monotonieverhalten der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Interpretation der Ergebnisse in diesem Kapitel rein auf Basis der numerischen Resultate geschieht.

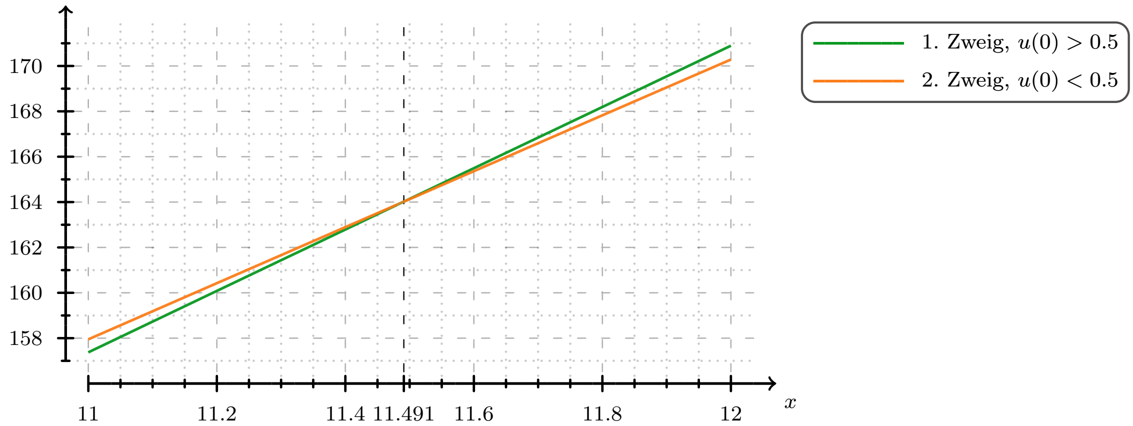


Bild 6.17: Helfrich-Energien der numerischen Lösungen der Helfrich-Gleichung zum Randwert $\alpha = 1.2$ in Abhängigkeit des Flächenanteils ε im Bereich des unstetigen Übergangs. Als Zweig werden die sich qualitativ ähnlich verhaltenden numerischen Lösungen zusammengefasst. Der erste Zweig beschreibt die numerischen Lösungen, welche flacher verlaufen (vgl mit Bild 6.16).

Die numerisch gefundenen Helfrich-Minimierer der verschiedenen Wertepaare (α, ε) lassen sich grob in drei Klassen einteilen: Helfrich-Minimierer deren Funktionswerte oberhalb des Randwertes α liegen, unterhalb oder konstant sind, d. h., mit dem Randwert α übereinstimmen. Das numerische Verfahren aus Kapitel 7 scheint andere mögliche Klassen auszuschließen. Bild 6.18 stellt die Verteilung der Klassen im (α, ε)-Parameterraum dar. Dort lässt sich erkennen, dass

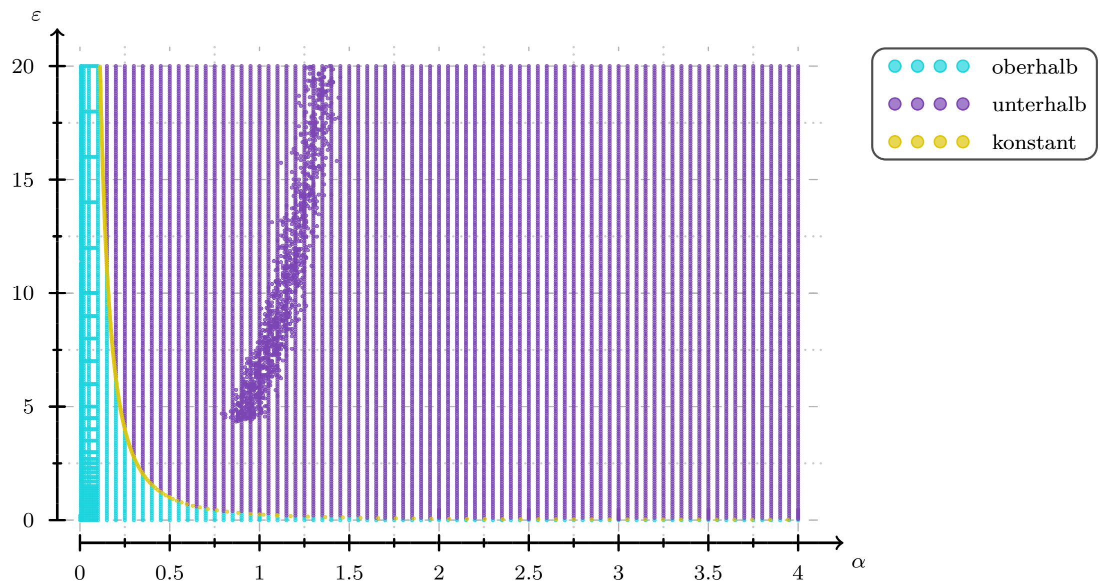


Bild 6.18: Ausschnitt der (α, ε)-Werte, deren numerisch berechnete Minimierer oberhalb oder unterhalb von α verlaufen oder konstant sind. Die einzigen konstanten Minimierer sind die Gleichgewichtszylinder aus Satz 5.1.1.

numerische Helfrich-Minimierer für $\alpha < \alpha_*$ typischerweise oberhalb und für $\alpha > \alpha_*$ unterhalb von α verlaufen. Einzig für $\alpha = \alpha_*$ sind die numerischen Helfrich-Minimierer konstant, im Einklang mit Satz 5.1.1 und Folgerung 5.1.3, wonach Gleichgewichtszylinder für $\alpha = \alpha_*$ die eindeutigen

Minimierer des Helfrich-Funktionals sind und es für andere Parameterwerte keine Zylinder als Lösung geben kann.

Spezieller lassen sich die in Bild 6.18 gezeigten Klassen noch weiter aufteilen, indem man das Monotonieverhalten der Helfrich-Minimierer berücksichtigt. Wir teilen die Minimierer in weitere Klassen ein, je nachdem, ob sie auf dem Intervall $(-1, 0)$ streng monoton wachsend, streng monoton fallend, alternierend oder konstant sind. Als „alternierend" bezeichnen wir das Verhalten, wenn die erste Ableitung kein definites Vorzeichen besitzt. Bild 6.19 zeigt die Einteilung der

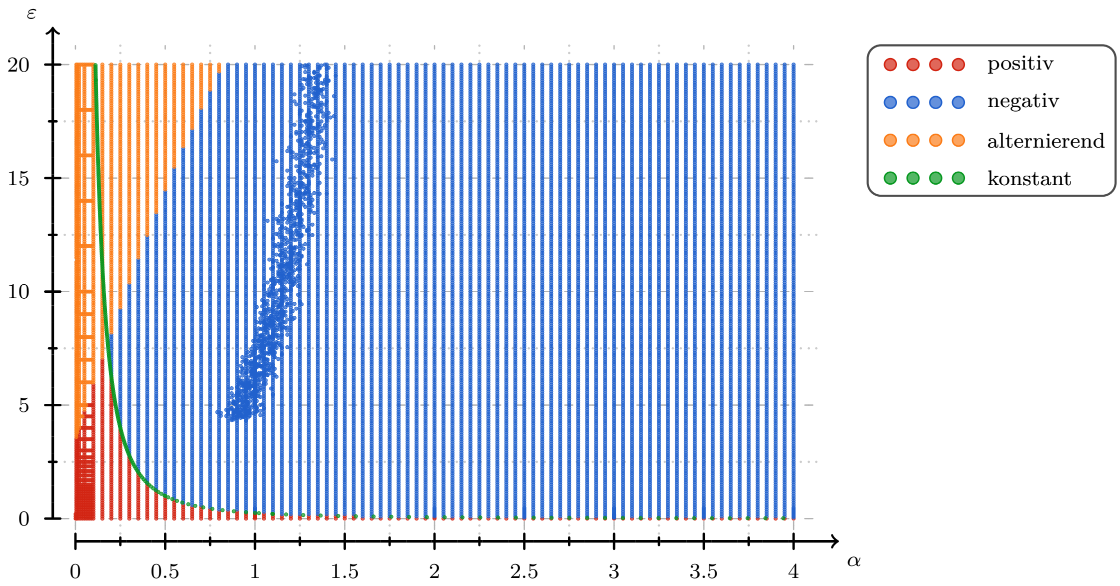


Bild 6.19: Einteilung der numerisch berechneten Helfrich-Minimierer in die verschiedenen Monotonieklassen. „Positiv" beschreibt auf $(-1, 0)$ streng monoton wachsende Minimierer, „negativ" streng monoton fallende, „konstant" die Gleichgewichtszylinder und „alternierend" Minimierer, deren erste Ableitung kein definites Vorzeichen besitzt.

numerisch berechneten Helfrich-Minimierer der (α, ε)-Werte in die jeweiligen Monotonie-Klassen. Bild 6.20 zeigt Beispiele von Minimierern der vier verschiedenen Monotonieklassen. Typischerweise

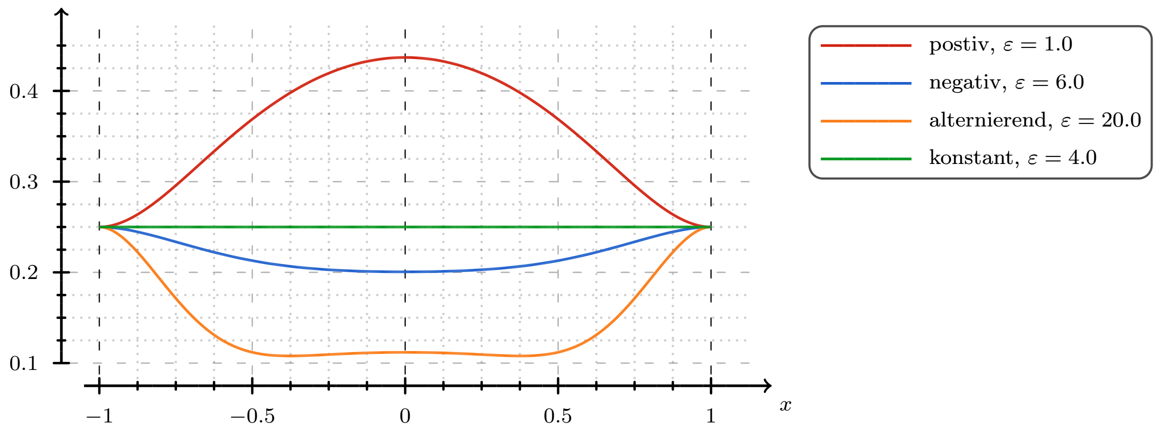


Bild 6.20: Beispiele von numerisch berechneten Helfrich-Minimierern der vier verschiedenen Monotonieklassen aus Bild 6.19 zum Randwert $\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ in der dort verwendeten Farbwahl.

tritt alternierendes Verhalten im Grenzübergang $\varepsilon \to \infty$ für hinreichend große ε bei Randdaten $\alpha < \alpha_m$, für welche Goldschmidt-Kurven flächenminimierend sind, auf, sodass die numerischen Helfrich-Minimierer unterhalb des Randwertzylinders laufen. Dies ließ sich in den Bildern 6.8 und 6.9 beobachten. Das alternierende Verhalten kann aber auch für Parameter auftreten, in denen numerische Helfrich-Minimierer oberhalb des Randwertzylinders verlaufen, was in Bild 6.21 dargestellt ist.

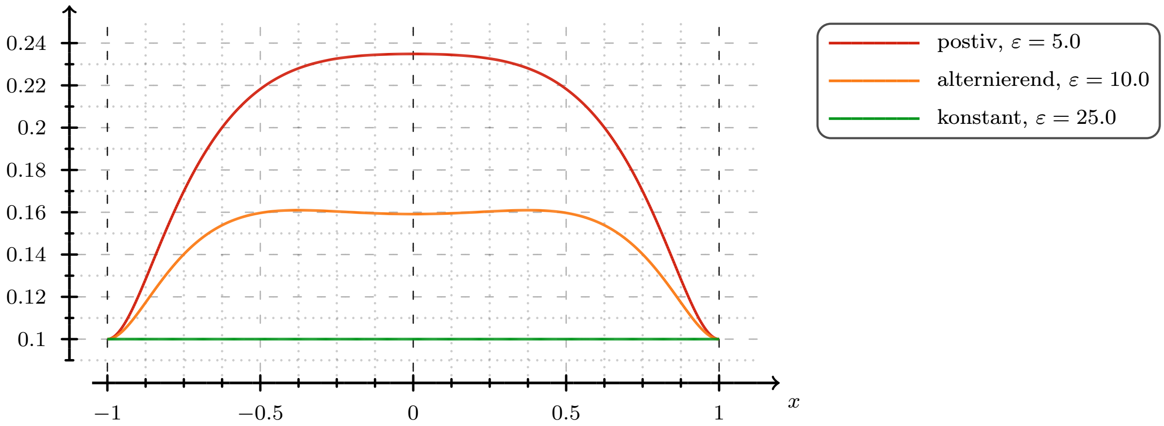


Bild 6.21: Beispiele von numerisch berechneten Helfrich-Minimierern zu den drei zum Randwert $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ vorkommenden Monotonieklassen aus Bild 6.19 in der dort verwendeten Farbwahl.

Das alternierende Verhalten tritt meist auf, wenn sich die Funktionswerte der numerischen Helfrich-Minimierer in der Nähe des zum gewählten Flächenanteil ε entsprechenden Gleichgewichtszylinders befinden. Wir haben in den Bildern 6.22 und 6.23 für die Randwerte aus den Bildern 6.20 und 6.21 die Differenzen der numerischen Helfrich-Minimierer zum entsprechenden Gleichgewichtszylinder dargestellt, um zu beobachten, wie sich die Oszillationen der Funktionen in Abhängigkeit von ε verhalten.

Es sei noch erwähnt, dass in [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008, Theorem 4] gezeigt wurde, dass Minimierer des Willmore-Funktionals stets oberhalb von α verlaufen und positives Monotonieverhalten besitzen. Dies konnte in den Bildern 6.18 und 6.19 also mittels des numerischen Verfahrens aus Kapitel 7 bestätigt werden. Diese Eigenschaften bleiben für die numerisch berechneten Helfrich-Minimierer mit hinreichend kleinen Flächenanteilen ε erhalten.

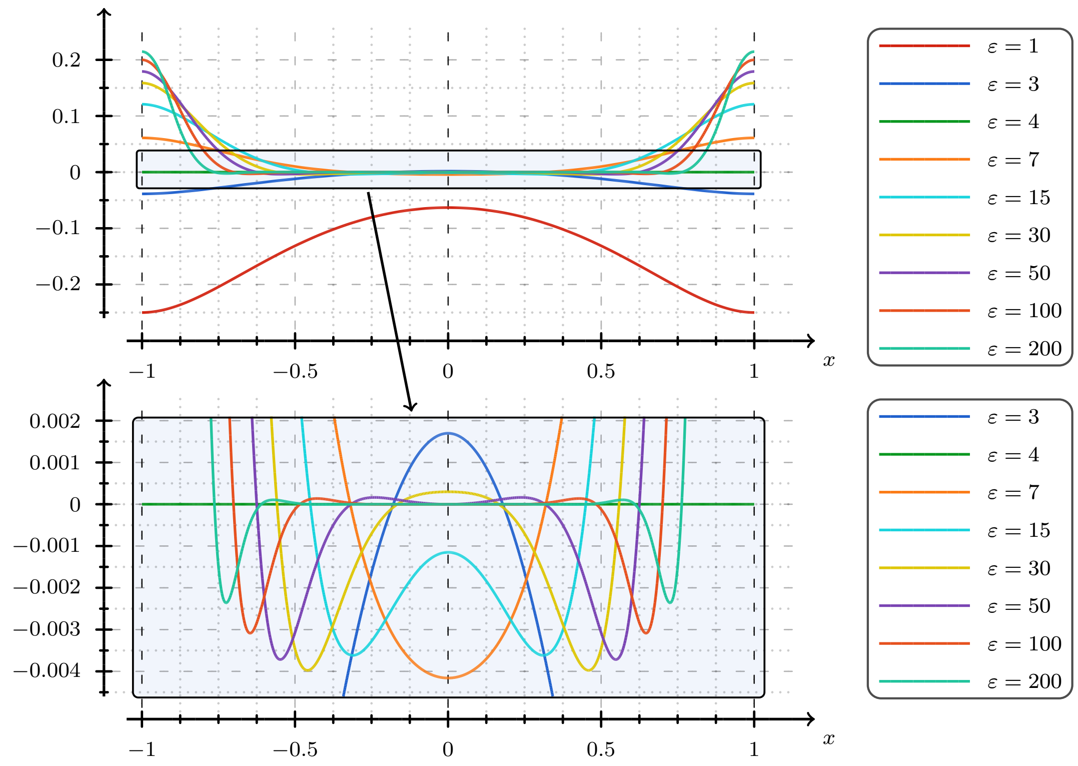


Bild 6.22: Darstellung der Differenzen $u - u_*$ von numerisch berechneten Helfrich-Minimierern u mit Randwert $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.25}$ und Flächenanteil ε zum entsprechenden Gleichgewichtszylinder u_*.

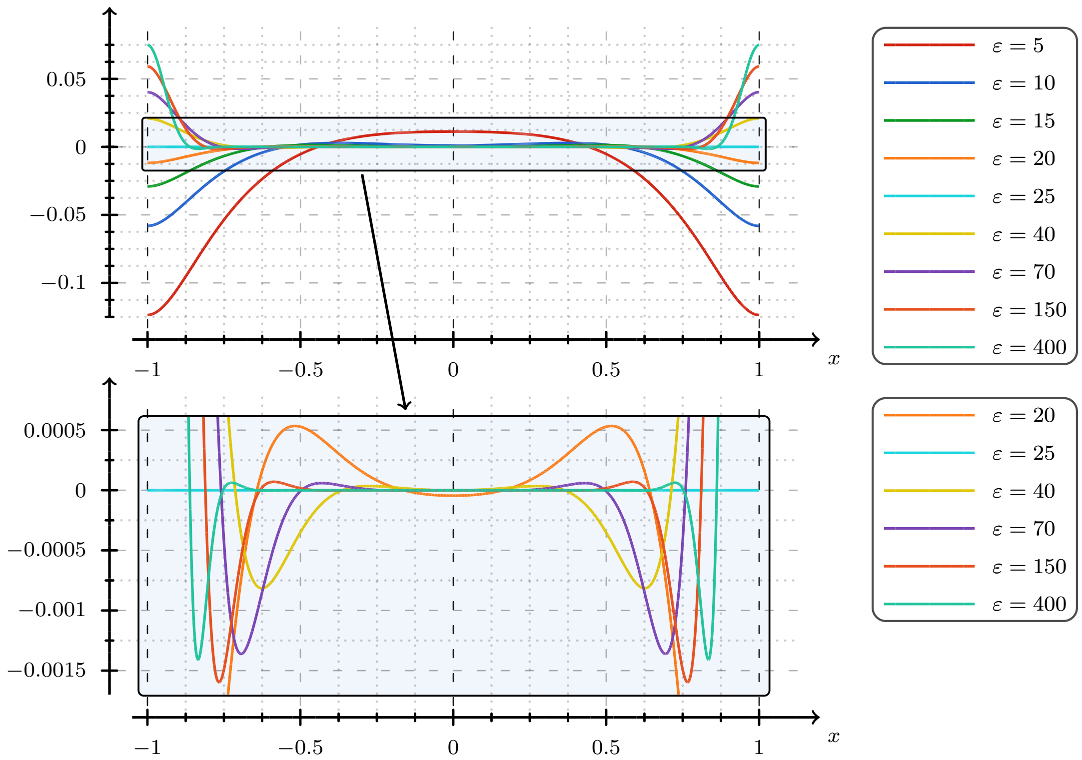


Bild 6.23: Darstellung der Differenzen $u - u_*$ von numerisch berechneten Helfrich-Minimierern u mit Randwert $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.1}$ und Flächenanteil ε zum entsprechenden Gleichgewichtszylinder u_*.

7. Finite-Elemente-Methode zum Lösen der Helfrich-Gleichung

Wir werden in diesem Kapitel das numerisches Verfahren zum Lösen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha}$) für graphische Rotationsflächen mittels der *Finite-Elemente-Methode* beschreiben, welches wir bereits ausgiebig in Kapitel 6 angewendet haben. Das Verfahren eignet sich auch für allgemeine Dirichlet-Randbedingungen graphischer Rotationsflächen, sodass wir die Helfrich-Gleichung bei Vorgabe dieser numerisch lösen wollen. Es stellt sich heraus, dass *konforme C^1-Elemente* mit Funktionen, welche Polynome dritten Grades auf den Elementen sind, für das numerische Lösen der Helfrich-Gleichung geeignet sind.

Zur Beschreibung des Verfahrens werden wir dazu in Kapitel 7.1 das allgemeine Dirichlet-Problem für graphische Helfrich-Flächen vorstellen und die Helfrich-Gleichung in eine variationelle Form bringen, das heißt, die schwache Formulierung aufstellen. Für diese werden wir dann in Kapitel 7.2 die konformen C^1-Elemente beschreiben, mit welchen wir in Kapitel 7.3 dann die schwache Helfrich-Gleichung in eine diskrete Form bringen können, welche sich für numerische Berechnungen eignet. Weiter beschreiben wir dort ausführlich, wie diese Methode in die Praxis umgesetzt wurde. In dieser Arbeit wollen wir allerdings auf rigorose Fehlerabschätzungen der Methode verzichten und uns in Kapitel 7.4 lediglich experimentell davon überzeugen, dass diese funktioniert. Einige Grundbegriffe zur Finite-Elemente-Methode lassen sich auch in Anhang B.4 nachlesen.

7.1. Variationelle Formulierung der Helfrich-Gleichung

Wir sind in diesem Kapitel an Lösungen des allgemeinen Dirichlet-Problems

$$(\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm}) \qquad \begin{cases} \Delta_{g_u} H_u + 2H_u\,(H_u^2 - K_u) - 2\varepsilon H_u \;=\; 0 \qquad \text{auf } (-1,1)\,, \\ u(\pm 1) = \alpha_\pm\,, \quad u'(\pm 1) \;=\; \pm\beta_\pm \end{cases}$$

für Helfrich-Flächen in der Klasse graphischer Rotationsflächen mit Profilkurven $u \in C^4([-1,1])$ und mit Randwerten $\alpha_\pm > 0$ und $\beta_\pm \in \mathbb{R}$ interessiert. Es sei

$$H_{\alpha_\pm,\beta_\pm} \;:=\; H_{\alpha_+,\alpha_-,\beta_+,\beta_-} \;:=\; \Big\{ u \in H^2(-1,1) :\; u > 0,\; u(\pm1) = \alpha_\pm,\; u'(\pm1) = \pm\beta_\pm \Big\} \;\subset\; H_+\,.$$

Für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode zum numerischen Lösen der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm}$) müssen wir diese allerdings in eine *variationelle Form* bringen. Das heißt, wir suchen Lösungen $u \in H_{\alpha_\pm,\beta_\pm}$ der schwachen Helfrich-Gleichung

$$
\begin{aligned}
&2\int_{-1}^{1} \frac{uu''\varphi''}{\left(1+u'^2\right)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - 5\int_{-1}^{1} \frac{uu'u''^2\varphi'}{\left(1+u'^2\right)^{7/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u'\varphi'}{u\left(1+u'^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
(\mathrm{sHG}_u)\qquad &+\int_{-1}^{1} \frac{u''^2\varphi}{\left(1+u'^2\right)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{\varphi}{u^2\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x + 4\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\,\mathrm{d}x \\
&+ 4\varepsilon\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2}\,\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(-1,1)\,.
\end{aligned}
$$

Nach Satz 4.3.1 wissen wir, dass schwache Lösungen automatisch glatte Funktionen sind, also $u \in C^\infty([-1,1]) \cap H_{\alpha_\pm,\beta_\pm}$, und somit automatisch klassische Lösungen des Dirichlet-Problems $(\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm})$, was die Anwendbarkeit der Finite-Elemente-Methode gewährleistet.

7.2. Beschreibung der C^1-Elemente

Die variationelle Formulierung in Gleichung (sHG_u) des Dirichlet-Problems $(\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm})$ eignet sich zur Anwendung einer Finite-Elemente-Methode. Wir geben hier die Konstruktion von konformen C^1-Elementen an, mit denen wir Lösungen von (sHG_u) aus $H_{\alpha_\pm,\beta_\pm}$ approximieren. Die Beschreibung der Elemente ist angelehnt an [Deckelnick und Schieweck, 2010, Section 6].

Für das Dirichlet-Problem $(\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm})$ eignen sich C^1-Elemente, da Elemente des unten eingeführten Finite-Elemente-Raumes X_h als stückweise polynomiale Funktionen in $C^{1,1}([-1,1]) = W^{2,\infty}(-1,1)$ (vgl. Satz B.3.7) liegen, sodass die schwache Helfrich-Gleichung (sHG_u) für solche Funktionen wohldefiniert ist.

Seien $\alpha_\pm > 0$ und $\beta_\pm \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wir beschreiben nun geeignete C^1-Elemente. Die Beschreibung teilen wir in fünf Schritte:

Schritt 1: Zerlegung von $[-1,1]$.

Gegeben seien $N+1$ Stützpunkte $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$. Die dadurch definierten Intervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,N$, bilden eine Zerlegung von $[-1,1]$. Wir bezeichnen die Intervallbreite von I_k mit $h_k := x_k - x_{k-1}$ und interpretieren $h = (h_1,\ldots,h_N)$ als Vektor, welcher die Zerlegung charakterisiert.

Schritt 2: Definition der finiten Elemente.

Jedes Intervall I_k wird zusammen mit den lokalen Testfunktionen $P_k = \mathbb{P}_3$, wobei $\mathbb{P}_3$ die Menge aller Polynome mit Grad kleiner oder gleich 3 bezeichnet, und den Freiheitsgraden Σ_k, bestehend aus den linearen Funktionalen

$$
\ell_1(p) := p(x_k)\,, \quad \ell_2(p) := p(x_{k-1})\,, \quad \ell_3(p) := p'(x_k)\,, \quad \ell_4(p) := p'(x_{k-1}) \qquad \text{für } p \in P_k\,,
$$

zu einem finiten Element.

Schritt 3: Unisolvenz der finiten Elemente.

Wir zeigen, dass durch die Angabe von vier Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ genau ein Element p aus $\mathbb{P}_3$ über dem Intervall $[0,1]$ bestimmt ist mit

$$p(0) = a_1\,, \qquad p(1) = a_2\,, \qquad p'(0) = b_1\,, \qquad p'(1) = b_2\,. \tag{7.1}$$

Mit p geschrieben in der Form $p(x) = z_3x^3 + z_2x^2 + z_1x + z_0$ und eingesetzt in die Bedingungen aus Gleichung (7.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} p(0) &= z_0 = a_1\,, & p(1) &= z_3 + z_2 + z_1 + z_0 = a_2\,,\\ p'(0) &= z_1 = b_1\,, & p'(1) &= 3z_3 + 2z_2 + z_1 = b_2\,. \end{aligned}$$

Umstellen liefert dann

$$z_0 = a_1\,, \qquad z_1 = b_1\,, \qquad z_2 = -3a_1 + 3a_2 - 2b_1 - b_2\,, \qquad z_3 = 2a_1 - 2a_2 + b_1 + b_2\,,$$

sodass p eindeutig bestimmt ist. Durch affine Transformation von $[0,1]$ auf I_k erhalten wir dann die Unisolvenz von (I_k, P_k, Σ_k), da die Bedingungen aus Gleichung (7.1) genau mit den Freiheitsgraden aus Σ_k übereinstimmen.

Schritt 4: Definition des Finite-Elemente-Raumes.

Als Finite-Elemente-Raum betrachten wir

$$X_h := \Big\{u_h \in C^1([-1,1]) : u_h\big|_{I_k} \in P_k = \mathbb{P}_3,\ k = 1,2,\dots,N\Big\} \subset C^{1,1}([-1,1]) \subset H^2(-1,1)\,,$$

welcher ein endlich-dimensionaler Unterraum von $H^2(-1,1)$ ist.

Schritt 5: Basis von X_h.

Für X_h definieren wir nun eine geeignete Basis. Dazu betrachten wir die Funktionen φ und η, definiert durch

$$\varphi := \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 1\,, & x \in [0,1]\,,\\ -2x^3 - 3x^2 + 1\,, & x \in [-1,0]\,,\\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \eta := \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x\,, & x \in [0,1]\,,\\ x^3 + 2x^2 + x\,, & x \in [-1,0]\,,\\ 0\,, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es gilt dann (vgl. mit Schritt 3)

$$\begin{cases} \varphi(j) = \delta_{j0}\,,\\ \varphi'(j) = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta(j) = 0\,,\\ \eta'(j) = \delta_{j0} \end{cases} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}\,.$$

Mithilfe dieser φ und η erhalten wir durch (siehe auch Bild 7.1 und 7.2)

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi\Big(\frac{x-x_j}{h_{j+1}}\Big)\,, & j \neq N,\ x \in I_{j+1}\,,\\ \varphi\Big(\frac{x-x_j}{h_j}\Big)\,, & j \neq 0,\ x \in I_j\,,\\ 0\,, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \eta_j(x) = \begin{cases} h_{j+1}\,\eta\Big(\frac{x-x_j}{h_{j+1}}\Big)\,, & j \neq N,\ x \in I_{j+1}\,,\\ h_j\,\eta\Big(\frac{x-x_j}{h_j}\Big)\,, & j \neq 0,\ x \in I_j\,,\\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $j = 0,1,\dots,N$ eine Basis von X_h mit

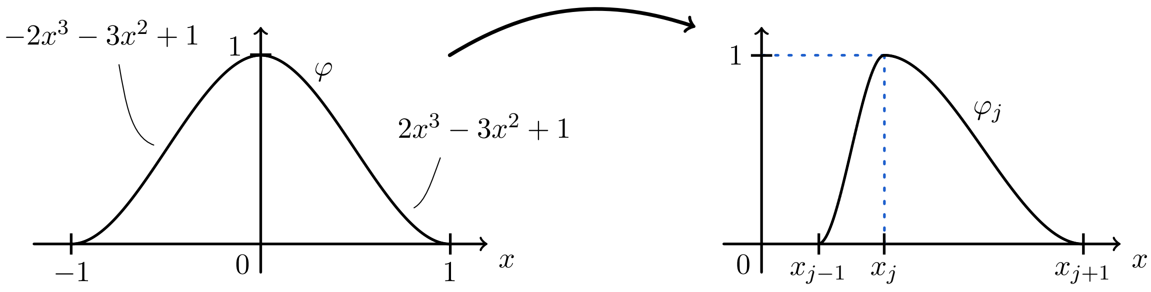


Bild 7.1: Darstellung der Funktion φ (links), welche, affin transformiert auf die entsprechenden finiten Elemente I_j und I_{j+1}, die Basisfunktion φ_j ergibt (rechts).

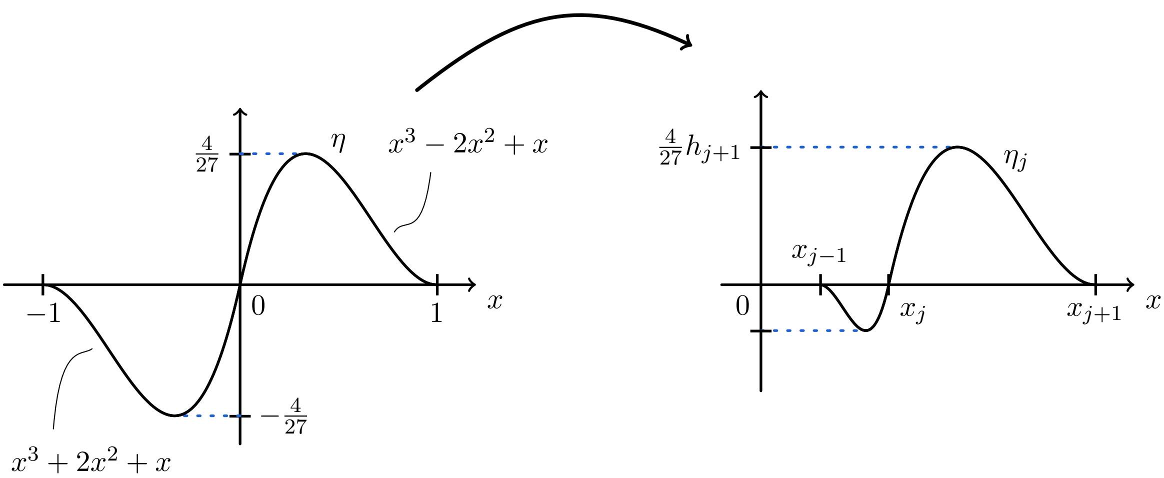


Bild 7.2: Darstellung der Funktion η (links), welche, affin transformiert auf die entsprechenden finiten Elemente I_j und I_{j+1}, die Basisfunktion η_j ergibt (rechts).

$$\begin{cases} \varphi_j(x_k) \;=\; \delta_{jk}\,, \\ \varphi_j'(x_k) \;=\; 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_j(x_k) \;=\; 0\,, \\ \eta_j'(x_k) \;=\; \delta_{jk}\,, \end{cases} \qquad j,k = 0,1,\ldots,N\,.$$

Dies folgt sofort aus der Unisolvenz der finiten Elemente und der Tatsache, dass

$$\big\{\varphi_{k-1}|_{I_k}\,,\ \varphi_k|_{I_k}\,,\ \eta_{k-1}|_{I_k}\,,\ \eta_k|_{I_k}\big\}$$

eine Basis von P_k bildet (vgl. mit Schritt 3).

Bezüglich der hier gewählten Basis besitzt ein $u_h \in X_h$ die Darstellung

$$u_h(x) \;=\; \sum_{j=0}^{N} c_j\,\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{N} d_j\,\eta_j(x) \qquad \text{mit } c_j = u_h(x_j)\,,\ d_j = u_h'(x_j)\,,\ j = 0,1,\ldots,N\,. \tag{7.2}$$

Das heißt, ein Element $u_h \in X_h$ ist durch die Angabe von $2N{+}2$ Zahlen $c_k, d_k \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,\ldots,N$, eindeutig bestimmt, sodass $X_h \cong \mathbb{R}^{2N+2}$.

7.3. Beschreibung und Implementierung der Methode

Wir beschreiben hier nun, wie die C^1-Elemente aus dem vorherigen Kapitel es erlauben, *diskrete Lösungen* des Dirichlet-Problems ($\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm}$) zu finden und wie diese Methode in die Praxis umgesetzt wurde.

Zu den vorgegebenen C^1-Elemente aus Kapitel 7.2 suchen wir *diskrete Lösungen* (Definition folgt unten) in der Menge

$$X_{h,\alpha_\pm,\beta_\pm} := X_h \cap H_{\alpha_\pm,\beta_\pm} \cong \Big\{(c_0, c_1, \dots c_N, d_0, d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} : c_{0,N} = \alpha_\pm,\ d_{0,N} = \beta_\pm \text{ und } c_k, d_k,\ k = 1, \dots, N-1, \text{ sodass } u_h > 0 \text{ mit } u_h \text{ definiert durch Gl. (7.2)}\Big\} \subset \mathbb{R}^{2N-2},$$

in welcher die Dirichlet-Randbedingungen berücksichtigt sind. Für die gesuchten Lösungen bleiben also $2N-2$ Parameter zu bestimmen. Ziel ist es, diese aus der schwachen Helfrich-Gleichung (sHG_u), getestet mit den Basisfunktionen φ_j und η_j aus Kapitel 7.2 für $j = 1, \dots, N-1$, zu berechnen. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir hier

$$\psi_j := \begin{cases} \varphi_j\,, & j \in \{1, 2, \dots, N-1\}\,, \\ \eta_{j-N+1}\,, & j \in \{N, N+1, \dots, 2N-2\} \end{cases} \qquad \text{für } j = 1, 2, \dots, 2N-2\,.$$

Über der Menge

$$\Omega := \Big\{(c_1, \dots, c_{N-1}, d_1, \dots, d_{N-1}) \subset \mathbb{R}^{2N-2} :\ u_h > 0, \text{ mit } u_h \text{ definiert durch Gl. (7.2), zusammen mit } c_{0,N} = \alpha_\pm,\ d_{0,N} = \beta_\pm\Big\}$$

betrachten wir die Abbildung $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^{2N-2}$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned} F_j(p) &:= \big\langle\, \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u_h)\,,\ \psi_j \big\rangle \\ &= 2\int_{-1}^{1} \frac{u_h u_h'' \psi_j''}{(1+u_h'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - 5\int_{-1}^{1} \frac{u_h u_h' u_h''^2 \psi_j'}{(1+u_h'^2)^{7/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{u_h' \psi_j'}{u_h\,(1+u_h'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-1}^{1} \frac{u_h''^2 \psi_j}{(1+u_h'^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{\psi_j}{u_h^2\sqrt{1+u_h'^2}}\,\mathrm{d}x + 4\varepsilon \int_{-1}^{1} \frac{u_h u_h' \psi_j'}{\sqrt{1+u_h'^2}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + 4\varepsilon \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u_h'^2}\,\psi_j\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.3}$$

für $j = 1, 2, \dots, 2N-2$, wobei wir jedem $p = (c_1, \dots, c_{N-1}, d_1, \dots, d_{N-1})$ zusammen mit $c_{0,N} = \alpha_\pm$ und $d_{0,N} = \beta_\pm$ durch Gleichung (7.2) ein u_h zugewiesen haben. Interessant für die Approximation von Lösungen der Helfrich-Gleichung sind die Nullstellen von F. Gilt $F(p) = 0$ für ein $p \in \Omega$, so erfüllt die entsprechende Funktion $u_h \in X_{h,\alpha_\pm,\beta_\pm}$

$$\big\langle\, \mathrm{d}_G \mathcal{H}_\varepsilon(u_h)\,,\ \psi \big\rangle = 0 \qquad \text{für } \psi \in X_{h,0,0}\,.$$

Wir nennen diese Gleichung in Anlehnung an die schwache Helfrich-Gleichung dann auch die **diskrete Helfrich-Gleichung**. Lösungen dieser bezeichnen wir als **diskrete Lösungen** der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm}$).

Für eine praxisrelevante Umsetzung der numerischen Berechnung diskreter Lösungen stellen sich noch zwei Fragen:

Frage 1: Wie berechnet man explizit den Wert von $F(p)$ für ein $p \in \Omega$?

Für die explizite Berechnung der Funktionswerte von F_j in Gleichung (7.3) beobachten wir bei fest gewähltem $j = 1, 2, \ldots, 2N-2$, dass der Integrand wegen Definition der ψ_j nur Träger in I_ℓ und $I_{\ell+1}$ besitzt, wobei

$$\ell = \begin{cases} j\,, & j \in \{1, 2, \ldots, N-1\}\,, \\ j - N + 1\,, & j \in \{N, N+1, \ldots, 2N-2\}\,. \end{cases}$$

Damit ist F_j dann von der Form

$$F_j(p) = \int_{I_\ell} f_\varepsilon(u_h, \psi_j)\ \mathrm{d}x + \int_{I_{\ell+1}} f_\varepsilon(u_h, \psi_j)\ \mathrm{d}x\,.$$

Da $u_h \in X_h$ auf I_k, $k = \ell, \ell+1$, die Form

$$u_h(x) = c_{k-1}\,\varphi_{k-1}(x) + c_k\,\varphi_k(x) + d_{k-1}\,\eta_{k-1}(x) + d_k\,\eta_k(x)$$

besitzt, erhalten wir nach affiner Transformation $T_k\colon I_k \to [0,1]$ die Funktion

$$u_{h,k}(x) := \big(u_h \circ T_k^{-1}\big)(x) = c_{k-1}\,\varphi(x) + c_k\,\varphi(x-1) + d_{k-1}\,\eta(x) + d_k\,\eta(x-1)\,.$$

Mit dieser Transformation erhält man

$$\int_{I_k} f_\varepsilon(u_h, \psi_k)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{h_k\, f_\varepsilon\big(u_{h,k} \circ T_k\,,\ \psi(\,\cdot\, + j - k) \circ T_k\big) \circ T_k^{-1}}_{=:\, \tilde{f}_\varepsilon(h_k\,,\, u_{h,k}\,,\, \psi(\,\cdot\,+j-k))}\ \mathrm{d}x\,,$$

wobei hier $\psi = \varphi$, falls $j = 1, \ldots, N-1$, und $\psi = \eta$, falls $j = N, \ldots, 2N-2$. Explizit berechnet sich der Integrand zu

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\varepsilon(h,u,v) = {} & \frac{2}{h^3}\,\frac{uu''v''}{\big(1+h^{-2}\,u'^2\big)^{5/2}} - \frac{5}{h^5}\,\frac{uu'u''^2v'}{\big(1+h^{-2}\,u'^2\big)^{7/2}} - \frac{1}{h}\,\frac{u'v'}{u\,\big(1+h^{-2}\,u'^2\big)^{3/2}} \\ & + \frac{1}{h^3}\,\frac{u''^2 v}{\big(1+h^{-2}\,u'^2\big)^{5/2}} - h\,\frac{v}{u^2\sqrt{1+h^{-2}\,u'^2}} + \frac{4\varepsilon}{h}\,\frac{uu'v'}{\sqrt{1+h^{-2}\,u'^2}} \\ & + 4\varepsilon h\sqrt{1+h^{-2}\,u'^2}\ v\,. \end{aligned}$$

Mit den expliziten Darstellungen von $u_{h,k}$ und ψ auf $[0,1]$ als Polynome dritten Grades lassen sich die Integrale in der Definition von F_j explizit hinschreiben. Die exakte Quadratur dieser erweist sich allerdings als sehr kompliziert. Es bietet sich hier also an, auf numerische Quadraturen zurückzugreifen. In Abschnitt 7.3.1 erwähnen wir die in der Praxis verwendete Quadratur.

Frage 2: Wie findet man die Nullstellen von F?

Die Methode der Wahl zur Nullstellenberechnung ist das Newton-Verfahren bzw. sind Verfahren, welche im Kern auf dem Newton-Verfahren basieren. Wir beschreiben in Abschnitt 7.3.1 kurz den in der Praxis verwendeten Algorithmus. Das Newton-Verfahren bietet sich an, um allgemeine Lösungen der Helfrich-Gleichung zu approximieren, also nicht nur Minimierer. Bekanntermaßen muss für den Erfolg des Newton-Verfahrens hinreichend nah an den gesuchten Lösungen gestartet werden.

Eine Alternative zur Berechnung diskreter Lösungen der Helfrich-Gleichung könnte eine Verallgemeinerung des Verfahrens aus [Deckelnick und Schieweck, 2010] (siehe auch [Dall'Acqua et al., 2011]) vom Willmore- hin zum Helfrich-Funktional sein. Dort wurden diskrete Lösungen mittels Willmore-Fluss über den finiten Elementen berechnet. Mit der energieminimierenden Eigenschaft des Willmore-Flusses ist diese Methode geeignet, um Minimierer von $\mathcal{W}$ in $X_{h,\alpha_\pm,\beta_\pm}$ zu berechnen und bietet sich somit im Gegensatz zum Newton-Verfahren und der Nullstellensuche von F also nicht an, instabile Helfrich-Flächen zu bestimmen.

7.3.1 Praktische Implementierung

Wir beschreiben nun die praktische Umsetzung des bisher beschriebenen Lösungsverfahrens zur Berechnung diskreter Lösungen der Helfrich-Gleichung.

Die verwendeten Programme wurden allesamt in Python geschrieben. Für diese wurde insbesondere Gebrauch der beiden Bibliotheken NumPy und SciPy für wissenschaftliches Rechnen gemacht. Dabei liefert SciPy die Funktionen quad und fsolve für die numerische Integration und die Nullstellensuche nichtlinearer Gleichungssysteme. Die Funktion quad basiert auf Techniken der Fortran-Bibliothek QUADPACK und fsolve wiederum ist ein Wrapper für die hybrd- und hybrj-Algorithmen aus Fortran's MINPACK-Bibliothek, welche Modifizierungen des Newton-Verfahren implementieren.

Bei der Berechnung diskreter Lösungen mittels fsolve kann es passieren, dass der Definitionsbereich Ω der Funktion F verlassen wird, sodass die entsprechende diskrete Funktion u_h negative Werte annimmt und somit Nullstellen besitzt. In diesen Fällen ist die Funktionswertberechnung von F mittels numerischer Quadratur unklar und quad wird eine Fehlermeldung ausgeben.

Mit der Verwendung der „Blackbox"-Funktionen quad und fsolve liegt der Fokus der Programme zum numerischen Lösen der Helfrich-Gleichung auf der Performance und der Einfachheit der Quelltexte zu Lasten der Nachvollziehbarkeit des numerischen Verfahrens. Die Beschreibung des Hauptprogramms wurde im Algorithmus 7.1 als Pseudocode zusammengefasst.

Nach erfolgreicher Umsetzung der Prozedur fällt eine weitere Fragestellung auf: Wie sind die Startfunktionen des Newton-Verfahrens für verschiedene Randbedingungen und Werte von ε zu wählen? Eine Option ist sicherlich das Raten und Probieren verschiedenster Startfunktionen. Für systematisches Finden von Lösungen zu unterschiedlichen Parametern ist dies aber nicht geeignet. Ist man allerdings in der Situation, dass man bereits eine Lösung zu einem Parametersatz $P_a = (\alpha_\pm^{(a)}, \beta_\pm^{(a)}, \varepsilon^{(a)})$ bei fest gewählten Stützstellen bzw. festem N gefunden hat, und interessiert sich für Lösungen zu einem Parametersatz $P_b = (\alpha_\pm^{(b)}, \beta_\pm^{(b)}, \varepsilon^{(b)})$, so kann man versuchen, die

requirements: Anzahl $N \in \mathbb{N}$ an finiten Elementen, Stützpunkte $x_0, x_1, \ldots, x_N$, Intervallbreiten $h_k = x_k - x_{k-1}$, Finite-Elemente-Basis φ_k, η_k, Randwerte $\alpha_\pm > 0$, $\beta_\pm \in \mathbb{R}$, Flächenanteil $\varepsilon \geq 0$

```
function equation_system(p, N, α±, β±, ε, h)
    c ← (α−, p_1, …, p_{N−1}, α+)
    d ← (β−, p_N, …, p_{2N−2}, β+)
    for j = 1, 2, …, 2N − 2 do
        if j ∈ {1, …, N − 1} then
            ψ ← φ
            ℓ ← j
        else
            ψ ← η
            ℓ ← j − N + 1
        end if
        for k = ℓ, ℓ + 1 do
            u_{h,k}( · ) ← c_{k−1} φ( · ) + c_k φ( · − 1) + d_{k−1} η( · ) + d_k η( · − 1)
            f_{j,k}( · ) ← f̃_ε(h_k , u_{h,k} , ψ( · + j − k))( · )
        end for
        F_j ← quad(f_{j,ℓ}, 0, 1) + quad(f_{j,ℓ+1}, 0, 1)
    end for
    return F = (F_1, …, F_{2N−2})
end function

function solve(u_start, N, α±, β±, ε, h)
    p_start ← Koeffizienten von u_start bezüglich ψ_j
    p_out ← fsolve(equation_system, p_start, args = (N, α±, β±, ε, h))
    u_out ← Σ_{j=1}^{2N−2} p_{out, j} ψ_j
    return u_out
end function
```

Algorithmus 7.1: Pseudocode zur Beschreibung des numerischen Lösens der Helfrich-Gleichung. Die Notation ist angelehnt an die im Text verwendete Notation. Die Funktion `equation_system` beschreibt das Ausrechnen der Komponenten von $F(p)$ aus Gleichung (7.3) für ein gegebenes $p \in \Omega$. Die Funktion `solve` wiederum berechnet dann eine Nullstelle von F, d. h. ein $p \in \Omega$, sodass $F(p) = 0$, zu einer vorgegebenen Anfangsfunktion u_{start} als Schätzung einer möglichen Lösung und gibt u_{out} als gefundene Lösung zurück.

Lösung bei P_a in hinreichend kurzen Schritten bis zum Parametersatz P_b zu „tracken“. Das heißt, für ein hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ wählt man Parametersätze

$$P_\ell := P_a + \frac{\ell}{m}(P_b - P_a)\,, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, m\,, \qquad \text{sodass } P_0 = P_a,\ P_m = P_b\,.$$

Da bei $P_0 = P_a$ bereits eine Lösung bekannt ist, lässt sich zum Finden einer Lösung bei P_1 dann die Lösung von P_0 als Startfunktion verwenden. Für die restlichen P_ℓ geht man iterativ vor, um eine Lösung zu P_b zu erhalten (siehe auch Bild 7.3). Der Erfolg des Trackings basiert auf der

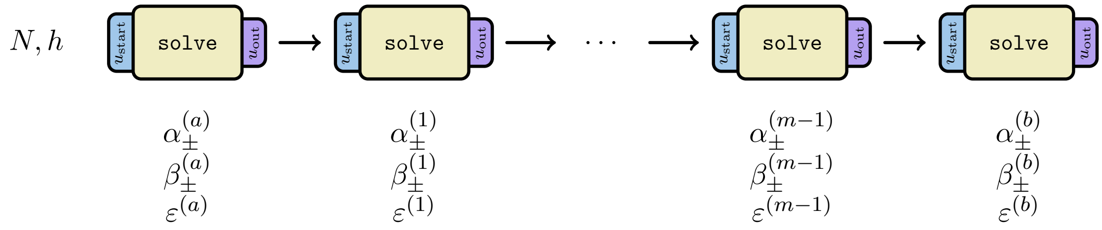


Bild 7.3: Schema zum Tracking von Lösungen zum Parametersatz P_a bis hin zum Parametersatz P_b bei fest gewählten Stützstellen.

Hoffnung der stetigen Abhängigkeit der Lösungen der Helfrich-Gleichung von den Daten, was nicht zwangsweise zu erwarten ist, sich aber dennoch meist als praktikabel herausstellt.

Die Idee des Trackings lässt sich noch etwas weiterführen. Die Rechenzeiten lassen sich minimieren, wenn man mit relativ wenigen Stützstellen, also mit kleinerem N, rechnet. Interessiert man sich einzig für die Lösung zum Parametersatz P_b, so kann man das Schema aus Bild 7.3 für klein gewähltes N verwendet, um dann bei P_b die Lösungen in steigendem N zu tracken (siehe Bild 7.4).

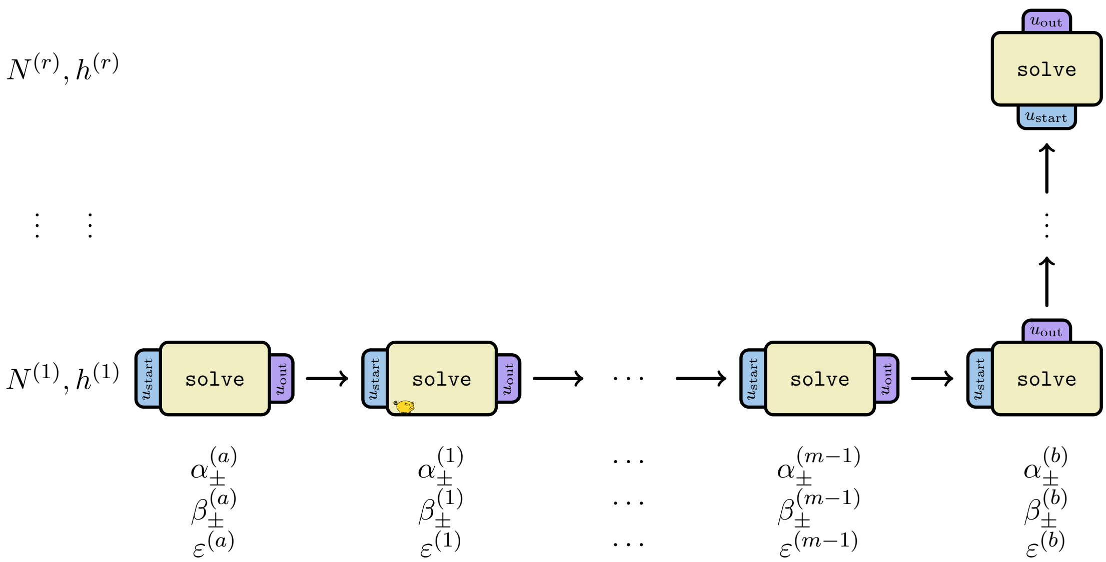


Bild 7.4: Schema zum Tracking von Lösungen zum Parametersatz P_a bis hin zum Parametersatz P_b mit optimierter Stützstellenverwaltung.

Wir besprechen noch die Wahl der Zerlegungen von $[-1, 1]$. Grundsätzlich stellen gleichverteilte Stützpunkte $x_k = \frac{2k}{N} - 1$ in der Praxis eine gute Wahl dar. Interessiert man sich unter anderem für Lösungen bei $\alpha_\pm \ll 1$, so treten bei $x \approx \pm 1$ oftmals große Ableitungen auf und es empfiehlt sich, hier mehr Stützpunkte bzw. kleinere Intervallbreiten der Elemente zu verwenden. Im Programm wurde dies mit der Funktion

$$H_s \colon [-1, 1] \to [-1, 1] \,, \qquad H_s(x) \;:=\; \operatorname{sign}(x)\, |x|^s \,,$$

für ein $s > 0$ realisiert, welche gleichverteilte Stützpunkte für $s < 1$ in Richtung $x = \pm 1$ schiebt und für $s > 1$ in Richtung $x = 0$ (siehe Bild 7.5).

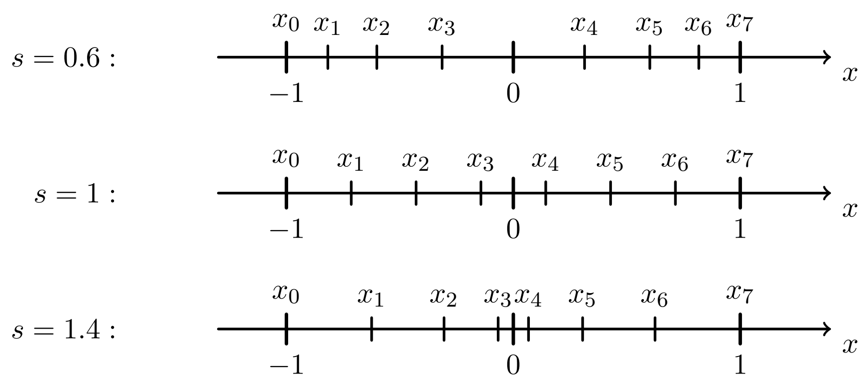


Bild 7.5: Darstellung der Stützstellen bei Verwendung der Stützstellenfunktion H_s mit verschiedenen Parametern s für $N = 7$.

Zum Schluss diskutieren wir noch die allgemeine Herangehensweise zur Lösungsbestimmung, wie sie in Kapitel 6 angewendet wurde. Dort haben wir symmetrische Randbedingungen $\alpha := \alpha_+ = \alpha_-$ und $\beta_+ = \beta_- = 0$ angenommen. Ausgehend von Lösungen, welche durch Probieren verschiedener Startfunktionen gefunden wurden bzw. welche unter anderem auch bekannt waren, wie der Zylinder bei $\alpha = \alpha_*$, wurde sukzessive das Schema aus Bild 7.4 angewandt. Dadurch konnten für 26023 verschiedene Sätze von Parametern (α, ε) insgesamt 37017 verschiedene Lösungen gefunden werden, welche in einer Datenbank gespeichert wurden. In Bild 7.6 ist eine Übersicht

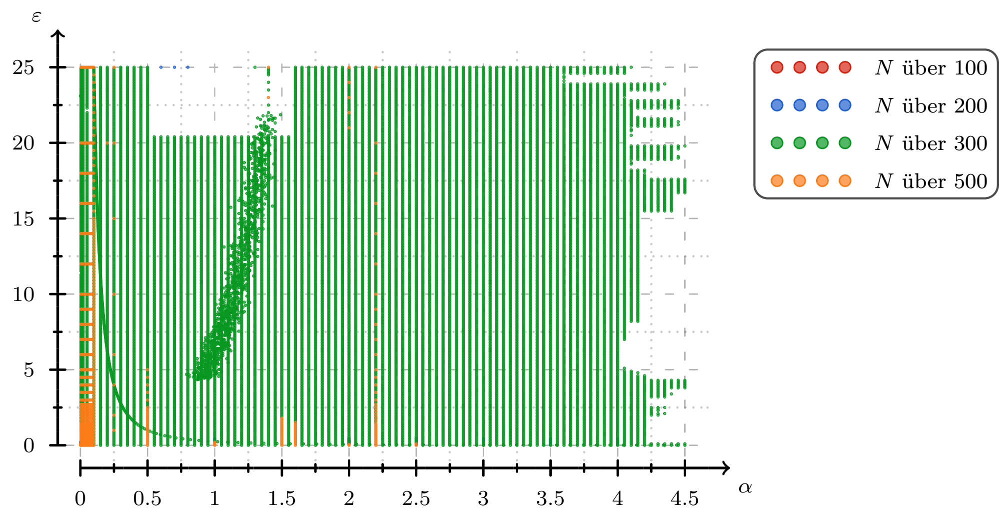


Bild 7.6: Übersicht über einen Ausschnitt aller in der Datenbank berechneten Parametersätze (α, ε), farbkodiert mit der größten Anzahl N der Lösungen des jeweiligen Parametersatzes.

aller berechneten Parametersätze (α, ε) gezeigt, farbkodiert mit der größten Anzahl der dort verwendeten finiten Elemente bezüglich aller Lösungen zu diesen Parametersätzen. Für die Datenbank wurden nur Lösungen mit $N \geq 100$ berücksichtigt. Bild 7.7 wiederum zeigt die Anzahlen der gefundenen Lösungen zu den berechneten Parametersätzen. ■

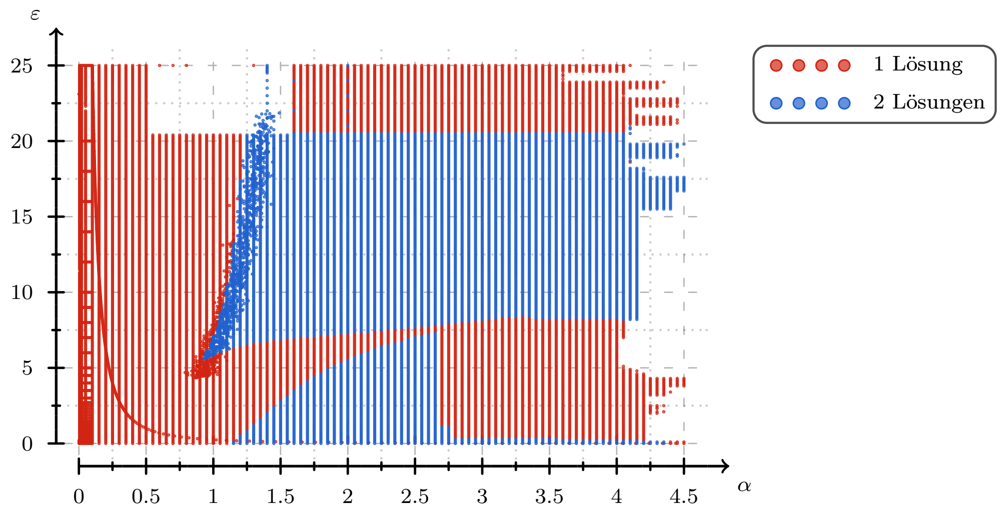


Bild 7.7: Übersicht der Anzahl an gefundenen Lösungen zu einem Ausschnitt der in der Datenbank berechneten Parametersätze (α, ε).

7.4. Verifizierung und Validierung der Methode

Wir werden in dieser Arbeit auf eine Fehleranalyse der im letzten Kapitel beschriebenen numerischen Lösungsmethode der Helfrich-Gleichung verzichten und stattdessen ihren Erfolg experimentell begründen. Dazu verifizieren wir zunächst, dass die Methode sinnvolle Ergebnisse liefert, bis wir dann quantitativ an zwei Beispielen die *experimentellen Konvergenzordnungen* ausrechnen.

7.4.1 Verifizierung

Zur Verifizierung der in Kapitel 7.3 beschriebenen Methode betrachten wir zwei Situationen, deren Lösungen bekannt sind, und versuchen, deren Eigenschaften qualitativ zu reproduzieren.

Zum einen wollen wir Gleichgewichtszylinder reproduzieren. Bild 7.8 zeigt das Ergebnis des Verfahrens für drei Paare (α, ε), sodass $\alpha = \alpha_* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Nach Satz 5.1.1 wissen wir, dass Zylinder die eindeutigen Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ sind und damit Lösungen der Helfrich-Gleichung $(\mathrm{HG}_{u,\alpha})$. Als Startfunktionen für das Verfahren wurden mit Absicht nicht-konstante Funktionen mit gleichen Randwerten gewählt, um kein triviales Problem zu erhalten. Man erkennt, dass die gefundenen diskreten Lösungen in Bild 7.8 qualitativ die gesuchten Zylinder beschreiben.

Als zweites Beispiel versuchen wir Lösungen der Willmore-Gleichung zu reproduzieren. Bild 7.9 zeigt wiederum die Ergebnisse für ein Randdatum $\alpha = \alpha_\pm = 1.2$ und $\beta_\pm = 0$. Wir haben hier verschiedene Startfunktionen gewählt, welche unterschiedliche diskrete Lösungen der Willmore-Gleichung ergaben. Die diskrete Lösung $u_h^{(1)}$ beschreibt den Minimierer des Willmore-Funktionals in H_α (vgl. mit [Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008, Theorem 4]). Die diskrete Lösung $u_h^{(2)}$ wiederum beschreibt eine zweite Lösung der Willmore-Gleichung, welche kein Minimum des Willmore-Funktionals auf H_α ist. Eine solche Lösung wurde in [Eichmann, 2016] beschrieben. ■

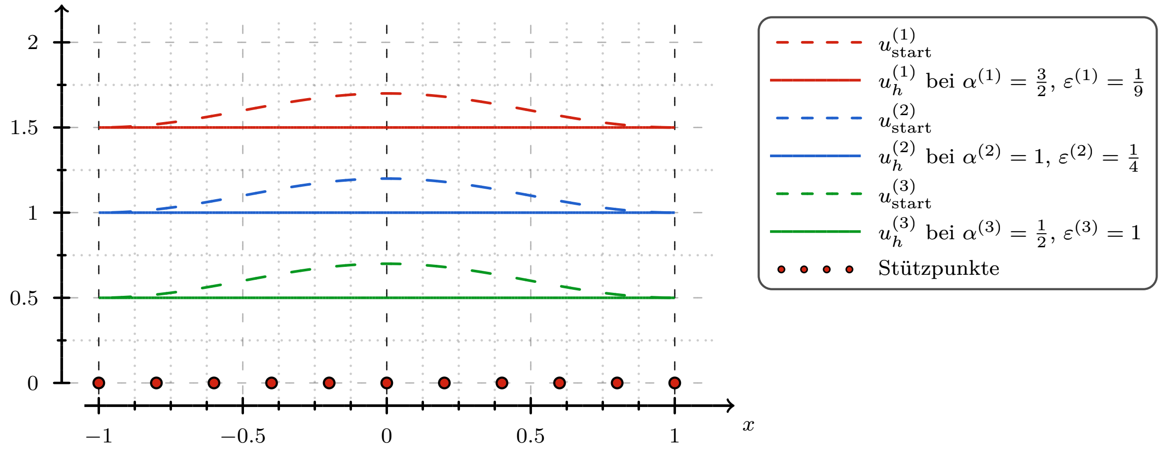


Bild 7.8: Verifizierung des Lösungsverfahren anhand der drei diskreten Lösungen $u_h^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, bei $N = 10$ finiten Elementen und für Randwerte $\alpha^{(i)}$ und Flächenanteilen $\varepsilon^{(i)} = \frac{1}{4\alpha^{(i)2}}$, welche die entsprechenden Gleichgewichtszylinder approximieren.

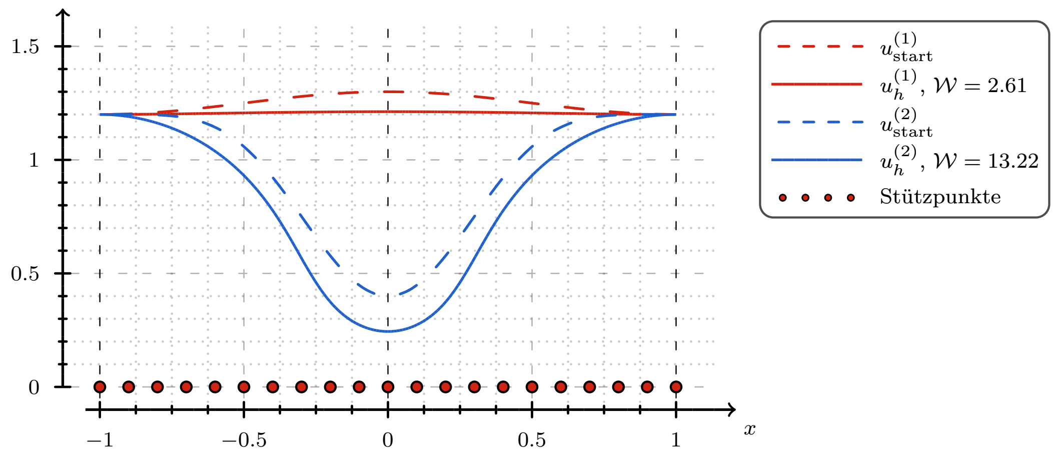


Bild 7.9: Verifizierung des Lösungsverfahren anhand von zwei diskreten Lösungen $u_h^{(i)}$, $i = 1, 2$, der Willmore-Gleichung für Randwerte $\alpha = \alpha_\pm = 1.2$ und $\beta_\pm = 0$ bei $N = 20$ finiten Elementen.

7.4.2 Validierung

Zur Validierung des Lösungsverfahrens berechnen wir die experimentellen Konvergenzordnungen anhand eines flächenminimierenden Katenoids als exakte Lösung der Helfrich-Gleichung sowie einer diskreten Lösung mit hinreichend großer Anzahl finiter Elemente, sodass wir diese als exakte Lösung annehmen können.

Unter der **experimentellen Konvergenzordnung** (**EOC**) verstehen wir den Ausdruck

$$\mathrm{EOC}(h, h') := \frac{\log\left(\frac{\|u-u_h\|_{C^0}}{\|u-u_{h'}\|_{C^0}}\right)}{\log\left(\frac{h}{h'}\right)},$$

wobei wir hier h und h' einerseits als Charakterisierung der entsprechenden Zerlegungen von $[-1, 1]$ verstehen wollen und andererseits als charakteristische Größenordnung dieser, wie beispielsweise die Intervallbreiten der finiten Elemente bei gleichverteilten Stützpunkten. Unter u verstehen wir eine Lösung der Helfrich-Gleichung ($\mathrm{HG}_{u,\alpha_\pm,\beta_\pm}$) und u_h bzw. $u_{h'}$ bezeichnen diskrete Lösungen der Helfrich-Gleichung zu den entsprechenden Zerlegungen. Speziell bei Halbierung der Größenordnung verstehen wir

$$\mathrm{EOC}(h) := \mathrm{EOC}\Big(h\,,\,\frac{h}{2}\Big) = \frac{\log\Big(\frac{\|u-u_h\|_{C^0}}{\|u-u_{h/2}\|_{C^0}}\Big)}{\log(2)}\,.$$

Für die in Kapitel 7.2 eingeführten C^1-Elemente lassen sich für die k-ten Ableitungen von u und u_h wegen der Darstellung als Polynome dritten Grades auf den einzelnen Elementen dann experimentelle Konvergenzordnungen von $\mathrm{EOC}(h) = 4 - k$ erwarten.

Als erstes Beispiel betrachten wir als konkrete Lösung der Helfrich-Gleichung das Beispiel eines flächenminimierenden Katenoids (siehe Kapitel 3.7)

$$u(x) = c\cosh\Big(\frac{x}{c}\Big) \qquad \text{mit } c > 0\,,$$

welches als Minimalfläche automatisch eine Willmore-Fläche und somit auch eine Helfrich-Fläche ist. Wir wählen $c \approx 1.12597$, sodass wir $\alpha_\pm = \alpha = 1.6$ und $\beta_\pm = \pm\beta \approx \pm 1.00956$ erhalten. Als Zerlegungen wählen wir gleichverteilte Stützpunkte $x_k = \frac{2k}{N} - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N$, mit $N = 2^\ell$ als Potenzen von 2, sodass sich für h als Intervallbreite der gleich großen finiten Elemente $h = \frac{2}{N} = \frac{1}{2^{\ell-1}}$ ergibt.

Für die ersten acht Werte von ℓ wurden dann die diskreten Lösungen zur Approximation des Katenoids berechnet. Als Startfunktion wurde

$$u_{\text{start}}(x) = \alpha - \frac{2\beta}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)$$

als Kosinus mit gleichen Randwerten wie u verwendet. Die C^0-Norm der Differenzen von u zu den diskreten Lösungen u_h bzw. der Differenzen der ersten beiden Ableitungen zusammen mit den experimentellen Konvergenzordnungen sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Bild 7.10 wiederum

Tabelle 7.1: Bestimmung der experimentellen Konvergenzordnungen (EOC) der diskreten Lösungen u_h als Approximationen des flächenminimierenden Katenoids u mit $\alpha = 1.6$ bei Halbierung der Intervallbreiten h der finiten Elemente.

N	h	$\|u-u_h\|_{C^0}$	EOC(h)	$\|u'-u_h'\|_{C^0}$	EOC(h)	$\|u''-u_h''\|_{C^0}$	EOC(h)
2	1	3.115×10^{-3}	-	8.324×10^{-3}	-	7.505×10^{-2}	-
4	1/2	2.468×10^{-4}	3.658	1.127×10^{-3}	2.885	1.912×10^{-2}	1.972
8	1/4	1.667×10^{-5}	3.888	1.374×10^{-4}	3.036	4.639×10^{-3}	2.044
16	1/8	1.065×10^{-6}	3.968	1.654×10^{-5}	3.054	1.128×10^{-3}	1.917
32	1/16	6.697×10^{-8}	3.992	2.014×10^{-6}	3.038	3.139×10^{-4}	1.968
64	1/32	4.192×10^{-9}	3.998	2.426×10^{-7}	3.053	7.948×10^{-5}	1.982
128	1/64	2.618×10^{-10}	4.001	3.04×10^{-8}	2.996	1.999×10^{-5}	1.991
256	1/128	4.613×10^{-11}	2.505	3.788×10^{-9}	3.005	4.953×10^{-6}	2.013

stellt das flächenminimierende Katenoid u zusammen mit zwei Beispielen von diskreten Lösungen u_h für $N = 2$ und $N = 256$ und der Startfunktion u_{start} dar. Man erkennt dort bereits kaum

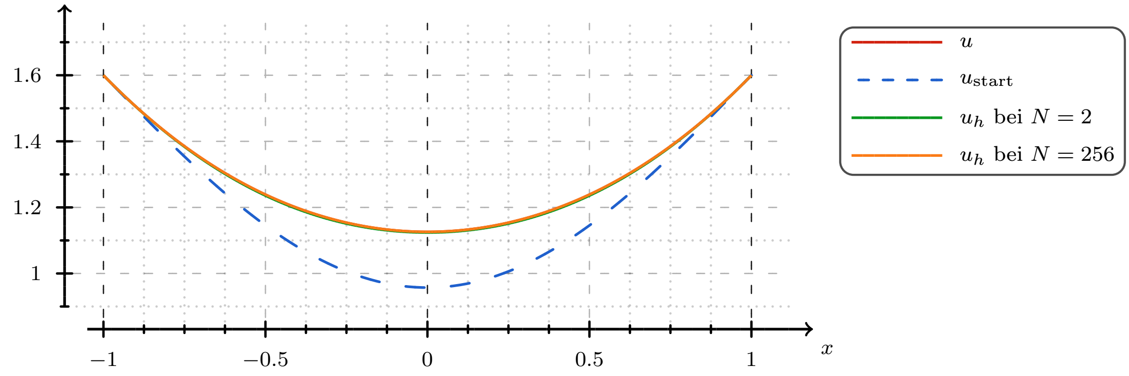


Bild 7.10: Darstellung des flächenminimierenden Katenoids u zum Randwert $\alpha = 1.6$ zusammen mit den diskreten Lösungen u_h bei $N = 2$ und $N = 256$ zur Startfunktion u_{start}. Das Katenoid und die beiden diskreten Lösungen liegen sehr nah beieinander.

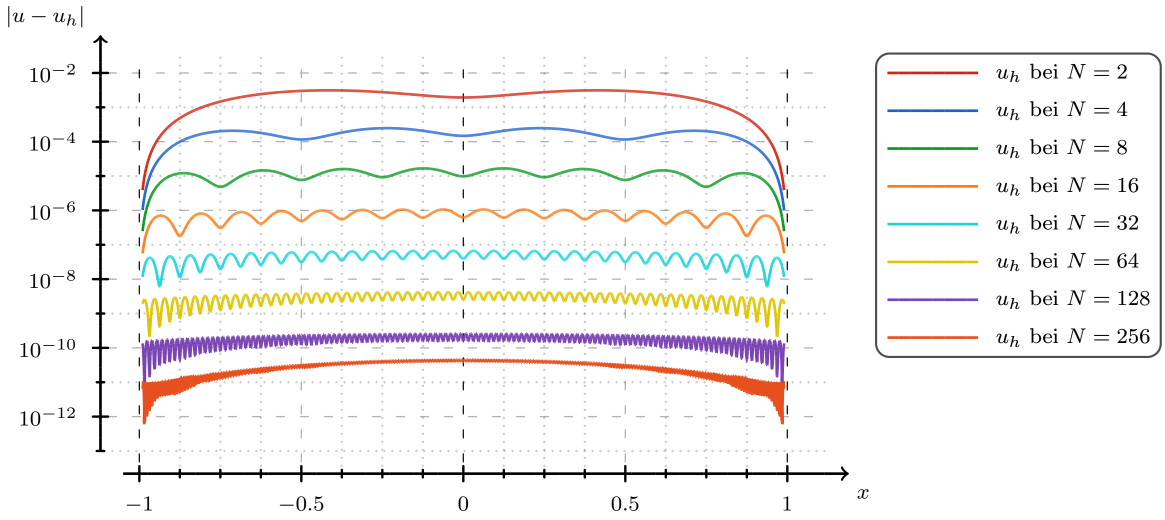


Bild 7.11: Darstellung der Abweichungen der diskreten Lösungen u_h bezüglich der angegebenen N zum Katenoid u in logarithmischer Darstellung.

Abweichungen der diskreten Lösungen vom Katenoid. Bild 7.11 zeigt die Abweichungen aller acht berechneten diskreten Lösungen vom Katenoid in logarithmischer Skalierung.

Tabelle 7.1 zeigt für die berechneten experimentellen Konvergenzordnungen bei $N = 4, 8, \ldots, 128$ für die nullte Ableitung im Schnitt eine Abweichung von 2.07 % und für die anderen beiden eine mittlere Abweichung von 1.67 % bzw. 1.78 % von den zu erwartenden Werten von $\mathrm{EOC}(h)$. Einzig der Wert von $\mathrm{EOC}(h)$ der nullten Ableitung bei $N = 256$ scheint von dem erwarteten Wert abzuweichen. Das lässt sich aber dadurch erklären, dass für die in Abschnitt 7.3.1 erklärte Funktion fsolve der Toleranzwert xtol $= 10^{-12}$ verwendet wurde. Da die Abweichung von u_h zu u bei $N = 256$ bereits in dieser Größenordnung liegt, sollte der Wert von $\mathrm{EOC}(h)$ als nicht repräsentativ betrachtet werden.

Als zweites Beispiel wurde eine etwas kompliziertere Lösung zu den in den Kapiteln 4, 5 und 6 verwendeten symmetrischen Randbedingungen mit $\beta_\pm = 0$ gewählt. Speziell wurde hier $\alpha = 0.2$ und $\varepsilon = 20$ betrachtet. Da eine explizite Funktionsvorschrift für eine Lösung zu diesen Parametern nicht vorlag, wurde als Referenzfunktion eine diskrete Lösung u mit einer hinreichend großen Anzahl an finiten Elementen gewählt. Als Anzahl haben wir $N = 3000$ verwendet. Die Zerlegungen von $[-1, 1]$ und die damit verwendeten finiten Elemente sind die gleichen wie beim ersten Beispiel. Tabelle 7.2 fasst die Ergebnisse zu diesem Beispiel zusammen. In den Bildern 7.12 und 7.13 haben

Tabelle 7.2: Bestimmung der experimentellen Konvergenzordnungen (EOC) der diskreten Lösungen u_h zur Approximation der Referenzfunktion u bei $\alpha = 0.2$ und $\varepsilon = 20$ und bei Halbierung der Intervallbreiten h der finiten Elemente.

N	h	$\lVert u - u_h \rVert_{C^0}$	EOC(h)	$\lVert u' - u_h' \rVert_{C^0}$	EOC(h)	$\lVert u'' - u_h'' \rVert_{C^0}$	EOC(h)
2	1	4.622×10^{-2}	-	0.202	-	2.937	-
4	$1/2$	9.222×10^{-3}	2.325	7.787×10^{-2}	1.378	1.742	0.754
8	$1/4$	7.426×10^{-4}	3.634	1.383×10^{-2}	2.494	0.573	1.604
16	$1/8$	7.474×10^{-5}	3.313	2.199×10^{-3}	2.653	0.165	1.797
32	$1/16$	8.713×10^{-6}	3.101	4.578×10^{-4}	2.264	6.713×10^{-2}	1.296
64	$1/32$	8.155×10^{-7}	3.417	7.98×10^{-5}	2.52	2.508×10^{-2}	1.42
128	$1/64$	5.314×10^{-8}	3.94	1.241×10^{-5}	2.685	8.015×10^{-3}	1.646
256	$1/128$	3.541×10^{-9}	3.907	1.391×10^{-6}	3.157	1.828×10^{-3}	2.133
512	$1/256$	2.275×10^{-10}	3.961	1.849×10^{-7}	2.911	4.814×10^{-4}	1.945

wir dann einige diskrete Lösungen u_h und ihre Abweichungen von u dargestellt.

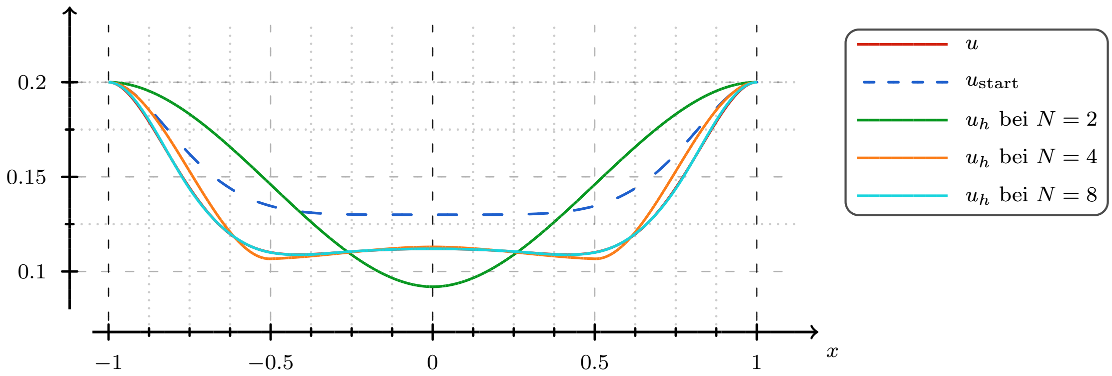


Bild 7.12: Darstellung der Referenzfunktion u zum Randwert $\alpha = 0.2$ zusammen mit den diskreten Lösungen u_h zu $N = 2, 4, 8$ zur Startfunktion u_{start}. Die Lösung zu $N = 8$ liegt bereits sehr nah an der Referenzfunktion.

Die Werte der experimentellen Konvergenzordnungen weichen in diesem Beispiel stärker von den zu erwartenden Werten ab, als im ersten Beispiel. Ignoriert man die Werte bei $N = 4$, so weichen diese im Mittel 9.74 %, 12.52 % und 17.48 % für die nullten, ersten und zweiten Ableitungen vom zu erwartenden Wert ab. Bei den diskreten Lösungen mit $N \geq 128$ reduziert sich der Fehler noch auf 1.6 %, 6.23 % und 9.37 %. ■

Die hier erbrachten experimentellen Untersuchen zeigen, dass die Implementierung aus Kapitel 7.3 sinnvolle Ergebnisse liefert. In einfachen Situationen stimmen die experimentellen Konver-

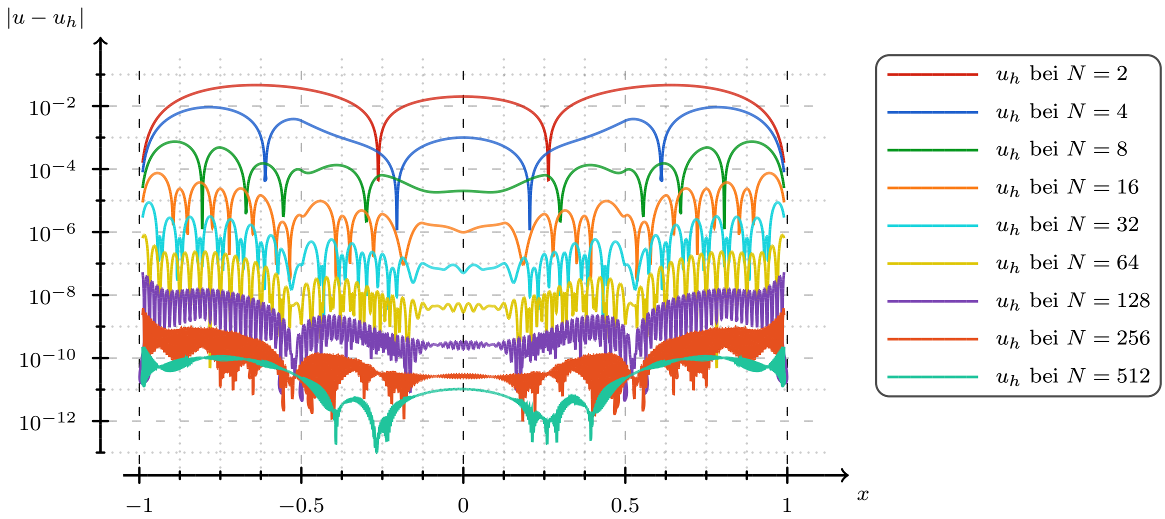


Bild 7.13: Darstellung der Abweichungen der diskreten Lösungen u_h bezüglich der angegebenen N zur Referenzfunktion u in logarithmischer Darstellung.

genzordnungen sehr gut mit den zu erwartenden Werten für die Konvergenzordnungen überein. Selbst in Regimen, wo die Lösungen kompliziertere Formen besitzen, lassen sich bei Wahl einer großen Anzahl finiter Elemente relativ genaue Werte für die zu erwartenden Konvergenzordnungen erzielen. Dies rechtfertigt die Verwendung der hier vorgestellten numerischen Methode zur Interpretation der Eigenschaften von Lösungen der Helfrich-Gleichung, wie wir sie in Kapitel 6 getätigt haben.

A. Grundlagen der Differentialgeometrie

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind die grundlegenden Objekte der *Differentialgeometrie*. Als Verallgemeinerung von Flächen und Kurven auf beliebige Dimensionen tauchen sie in vielen Gebieten der Mathematik auf. Viele wichtige geometrische Größen wie *Vektorfelder* und *Tensoren* lassen sich unter dem Konzept von *Schnitten* von *Vektorbündeln* beschreiben, welche demzufolge eine ebenso wichtige Rolle in der Differentialgeometrie einnehmen. Diese lassen sich als über der darunterliegenden Mannigfaltigkeit glatt „zusammengeklebte“ Vektorräume, den *Fasern*, verstehen. Um die Fasern unterschiedlicher Punkten der Mannigfaltigkeit vergleichen zu können, bedarf es einer zusätzlichen geometrischen Struktur, einem *Zusammenhang*, welche ebenso die Einführung von *Krümmungen* der Vektorbündel erlaubt. Wir geben hier einen Überblick über die erwähnten Begriffe sowie Definitionen und fassen einige Beispiele zusammen. Ziel ist es, alle möglichen Begriffe, die für das Verständnis des geometrischen Teils der Arbeit notwendig sind, zusammenzutragen und Notationen und Konventionen für diese Arbeit festzulegen.

In Kapitel A.1 beginnen wir mit den Grundbegriffen der Differentialgeometrie, d. h. mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, Tangentialräumen, Tensoren und Integration auf Mannigfaltigkeiten. Kapitel A.2 liefert dann eine Beschreibung von Vektorbündeln mit verschiedenen Beispielen, für welche wir dann in Kapitel A.3 den Begriff eines Zusammenhangs definieren wollen. In Kapitel A.4 erwähnen wir noch das *Pullback-Bündel* als ein weiteres Beispiel von Vektorbündeln, welches in dieser Arbeit eine bedeutendere Rolle spielt. Das letzte Kapitel, Kapitel A.5, setzt sich dann mit Krümmungen und der Definition von *Laplace-Operatoren* auf Vektorbündeln auseinander. Für ausführlichere Erklärungen und Beschreibungen der Begriffe verweisen wir auf die Literatur, im Speziellen auf [*Lee, 2013*], [*Lee, 1997*], [*Jost, 2005*], [*Waldmann, 2007*], [*Isham, 1999*], [*Willmore, 1993*] sowie [*Kobayashi und Nomizu, 1963*].

A.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir nutzen das Kapitel hier, um die grundlegenden Begriffe der Differentialgeometrie zu erklären und zusammenzufassen. *Differenzierbare Mannigfaltigkeiten* verallgemeinern den Flächenbegriff auf beliebige Dimensionen und ohne die Verwendung ambienter Räume. Für diese rein intrinsische Sichtweise bedarf es einer geeigneten Definition von *Tangentialvektoren*. Weiter diskutieren wir *Tensoren*, *Differentialformen* und die Integration auf Mannigfaltigkeiten.

Unter einer **topologischen $\boldsymbol{n}$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand)** $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ (oder $\boldsymbol{\mathcal{M}^n}$, sofern die Dimension hervorzuheben ist) verstehen wir einen topologischen Raum, dessen Topologie hausdorffsch und zweitabzählbar ist, zusammen mit einer Überdeckung lokaler Homöomorphismen, den **Karten** (siehe Bild A.1), in den $\mathbb{R}^n$ oder in affine Halbräume des $\mathbb{R}^n$,

d. h. affine Transformationen des (abgeschlossenen) oberen Halbraumes

$$\overline{\mathbb{H}}^n := \{p \in \mathbb{R}^n : p^n \geq 0\},$$

welche mit der Unterraumtopologie versehen sind. Lokal lässt sich eine solche Mannigfaltigkeit also mit n Koordinaten beschreiben. Erfüllt die Gesamtheit dieser Karten gewissen Kompatibilitätsbedingungen (siehe auch [*Lee, 2013*, Chapter 1]), das heißt, die Koordinatenwechsel (siehe Bild A.1) sind differenzierbare Abbildungen, so fasst man diese als **differenzierbare Struktur** zu-

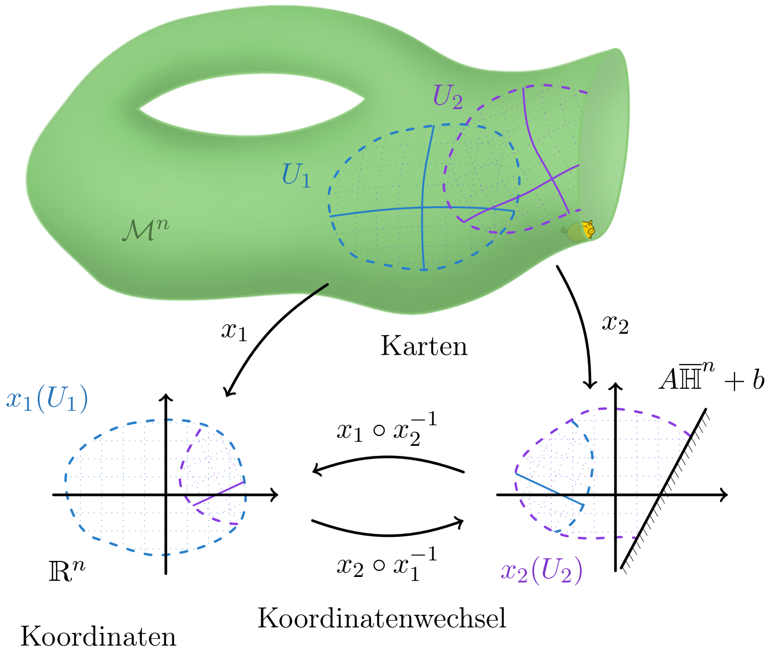


Bild A.1: Veranschaulichung der Definition einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}^n$ mit Rand.

sammen und nennt die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ (bzw. $\mathcal{M}^n$) eine **differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit** (**mit oder ohne Rand**). Punkte auf $\mathcal{M}$, deren Bilder in einer Karte auf der entsprechenden affinen Hyperfläche liegen, heißen **Randpunkte**. Die Menge aller Randpunkte wird als (**Mannigfaltigkeiten-**)**Rand** von $\mathcal{M}$ bezeichnet und mit $\partial\mathcal{M}$ geschrieben. Dieser ist nicht mit dem topologischen Rand von $\mathcal{M}$ zu verwechseln.

Als **Tangentialvektor $\boldsymbol{\xi}$ im Punkt $\boldsymbol{p \in \mathcal{M}}$** einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ bezeichnet man die Äquivalenzklasse von Kurven, welche ξ als „Geschwindigkeitsvektor“ besitzen (siehe [*Isham, 1999*, Definition 2.4]). Äquivalent dazu lässt sich ein Tangentialvektor ξ auch als **Derivation in $\boldsymbol{p}$** auffassen, das heißt als eine reellwertige Abbildung auf $C^\infty(\mathcal{M})$, der Menge der glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$, welche für alle $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ die Relation $\xi(fg) = f(p)\,\xi(g) + g(p)\,\xi(f)$ erfüllt (siehe [*Isham, 1999*, Section 2.3.5]). Als **Tangentialraum $\boldsymbol{T_p\mathcal{M}}$** bezeichnet man die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt p. Die disjunkte Vereinigung

$$T\mathcal{M}^n := \coprod_{p \in \mathcal{M}^n} T_p\mathcal{M}^n$$

wird als **Tangentialbündel** bezeichnet, welches wiederum als $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden kann (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 3.18]). Spezieller noch kann man zeigen, dass

$T\mathcal{M}$ ein *Vektorbündel* ist (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 10.4] und Kapitel A.2). Ein (**Tangential-) Vektorfeld $\boldsymbol{X}$ auf $\boldsymbol{\mathcal{M}}$** ist als *Schnitt* des Tangentialbündels $T\mathcal{M}$ definiert (siehe auch [*Lee, 2013*, Chapter 8]), d. h. als Abbildung $X\colon \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ mit $X_p := X(p) \in T_p\mathcal{M}$. Die Menge aller Vektorfelder wird mit $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ bezeichnet. Äquivalent lässt sich ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ auch als **Derivation** auf $\mathcal{M}$ auffassen (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 8.15]), d. h. als eine Abbildung $X\colon C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, sodass für alle $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ gilt, dass $X(fg) = f\,X(g) + g\,X(f)$. Wir schreiben dann auch $(Xf)(p) = (X(p))(f) = X_p(f)$ für $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ und $p \in \mathcal{M}$. Vektorfelder lassen sich addieren, allerdings im Allgemeinen (im Sinne von Derivationen) nicht multiplizieren. Es lässt sich dagegen zeigen, dass der Kommutator zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

$$[\cdot\,,\cdot]\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,, \qquad [X\,,Y] := XY - YX\,,$$

wieder ein Vektorfeld ergibt. Vektorfelder werden als **lokal** bezeichnet, wenn sie lediglich über offenen Teilmengen $U \subset \mathcal{M}$, welche wiederum als Mannigfaltigkeiten mit Tangentialbündel $TU = T_U\mathcal{M} := \coprod_{p\in U} T_p\mathcal{M}$ aufgefasst werden können, definiert sind. Ferner induziert jede Karte von $\mathcal{M}^n$ n lokale **Koordinatenvektorfelder $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}$** bzw. $\boldsymbol{\partial_{x^i}}$, $i = 1, \dots, n$, welche zu den partiellen Ableitungen glatter Funktionen in die i-ten Koordinatenrichtungen korrespondieren. Diese bilden eine Basis von $T_U\mathcal{M}^n$ in der Hinsicht, dass es zu jedem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$ Komponentenfunktionen $X^i \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$ gibt, sodass

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

für p in der Kartenumgebung (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 8.1]).

Als **Kotangentialraum $\boldsymbol{T_p^*\mathcal{M}}$** bezeichnet man den Dualraum von $T_p\mathcal{M}$, also den Raum aller linearen Funktionale über $T_p\mathcal{M}$. Elemente von $T_p^*\mathcal{M}$ nennt man auch **Kovektoren**. Die disjunkte Vereinigung

$$T^*\mathcal{M}^n := \coprod_{p\in\mathcal{M}^n} T_p^*\mathcal{M}^n$$

nennt man das **Kotangentialbündel**, welches wie das Tangentialbündel eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und ein Vektorbündel ist (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 11.9]). Die Schnitte des Kotangentialbündels, also Abbildungen $\omega\colon \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ mit $\omega(p) \in T_p^*\mathcal{M}$, heißen **Kovektorfelder** oder **1-Formen**. Die Menge aller Kovektorfelder wird mit $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ bezeichnet. Man kann dann auch wieder zeigen, dass sich $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ als lineare Abbildung über $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ auffassen lässt, sodass wir für ein $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dann $\omega_p(X_p) = (\omega(X))(p)$ mit $\omega_p = \omega(p)$ schreiben können. Dies folgt aus einem allgemeinen Resultat für Schnitte des *Tensorbündels* $T_s^r\mathcal{M}$. Unter einem **Tensor vom Typ $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ im Punkt $\boldsymbol{p} \in \mathcal{M}$** verstehen man wiederum Elemente des **Tensorraumes**

$$(T_s^r)_p\mathcal{M} := \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M}}_{r\text{-fach}} \otimes \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p^*\mathcal{M}}_{s\text{-fach}}\,.$$

Das **$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$-Tensorbündel** ist als disjunkte Vereinigung

$$T_s^r\mathcal{M}^n := \coprod_{p\in\mathcal{M}^n} (T_s^r)_p\mathcal{M}^n$$

eine $(n + n^{r+s})$-dimensionale Mannigfaltigkeit und ein Vektorbündel, deren Schnitte **Tensoren vom Typ (r, s)** heißen und mit $\mathfrak{X}^r_s(\mathcal{M}^n)$ bezeichnet werden. Ein solcher Tensor $\mathcal{T} \in \mathfrak{X}^r_s(\mathcal{M})$ lässt sich nach [*Lee, 1997*, Lemma 2.4] als multilineare Abbildung

$$\mathcal{T}\colon\ \underbrace{\mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})}_{r\text{-fach}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{s\text{-fach}} \to C^\infty(\mathcal{M})$$

auffassen. Die Umkehrung gilt ebenso. Die Eigenschaft $C^\infty(\mathcal{M})$-multilinear zu sein, wird oft auch als **tensoriell** bezeichnet und sagt aus, dass der Wert eines Objektes an einem Punkt lediglich vom Wert des Arguments an diesem Punkt abhängt. Als **Tensorprodukt zweier Tensoren** verstehen wir die bilineare Abbildung $\otimes\colon \mathfrak{X}^r_s(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}^{r'}_{s'}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}^{r+r'}_{s+s'}(\mathcal{M})$ mit

$$\begin{aligned}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}')&(\omega_1, \ldots, \omega_{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) := \\ &\mathcal{T}(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)\, \mathcal{T}'(\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'})\,.\end{aligned}$$

Wir haben die Spezialfälle $\mathfrak{X}^0_0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$, $\mathfrak{X}^1_0(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $\mathfrak{X}^0_1(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$. Eine besondere Bedeutung besitzen alternierende $(0, k)$-Tensoren, welche beim Wechsel zweier Vektorfelder im Argument ihr Vorzeichen ändern. Diese werden **Differential-** oder ***k*-Formen** genannt und, in ihrer Gesamtheit, mit $\Lambda^k(\mathcal{M})$ bezeichnet. Das Tensorprodukt induziert auf der Menge der Formen das sogenannte **Dachprodukt**. Dies ist die Abbildung $\wedge\colon \Lambda^k(\mathcal{M}) \times \Lambda^\ell(\mathcal{M}) \to \Lambda^{k+\ell}(\mathcal{M})$, welche sich aus dem Tensorprodukt komponiert mit der Abbildung, welche einem Tensor eine alternierende Multilinearform zuweist, ergibt (siehe [*Lee, 2013*, Chapter 14]). Das Dachprodukt ist eine Verallgemeinerung des Kreuzproduktes auf $\mathbb{R}^3$. Lokal bilden die zu den Koordinatenvektorfeldern dualen **Koordinatenkovektorfelder $\mathbf{d}x^i$**, $i = 1, \ldots, n$, eine Basis für die Kovektorfelder $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M}^n)$. Analog lassen sich durch Kombination aller möglichen Tensorprodukte der Koordinatenvektor- und -kovektorfelder eine Basis für Tensoren, bzw. bei Kombination aller möglichen Dachprodukte, eine Basis aller k-Formen finden.

Im Speziellen nennen wir eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zusammen mit einem symmetrischen und positiv definiten $(0, 2)$-Tensor g, der **riemannschen Metrik**, auch eine **riemannsche Mannigfaltigkeit**. Demzufolge erfüllt diese Metrik $g(X, Y) = g(Y, X)$ und $g(X, X) > 0$, falls $X \neq 0$ für $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Eine riemannsche Metrik definiert punktweise Skalarprodukte auf den Tangentialräumen $T_p\mathcal{M}$. Wir schreiben in Analogie deshalb auch oft $\langle X_1, X_2\rangle_g := g(X_1, X_2)$ für $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Wir nennen Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ **orthonormal**, falls $\langle X_i, X_j\rangle_g = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, k$. Es lässt sich zeigen, dass man lokal stets orthonormierte Basis-Vektorfelder finden kann (siehe [*Lee, 2013*, Corollary 13.8]), welche im Allgemeinen allerdings keine Koordinatenvektorfelder sein werden. Wegen der Definitheit der Metrik lassen sich die Tangentialräume $T_p\mathcal{M}$ auf kanonische Weise, d. h. basisunabhängig, mit den Kotangentialräumen $T^*_p\mathcal{M}$ identifizieren (vgl. mit dem *Darstellungssatz von Fréchet-Riesz* in Kapitel B.1). Dieser Isomorphismus wird auch als *musikalischer Isomorphismus* $\cdot^\sharp\colon T_p\mathcal{M} \to T^*_p\mathcal{M}$ mit $\xi^\sharp(\eta) = g_p(\xi, \eta)$ und Inversem $\cdot^\flat = (\cdot^\sharp)^{-1}$ bezeichnet. Dieser ermöglicht das „Heben“ und „Senken“ von Indizes beliebiger Tensoren. Insbesondere lassen sich damit Spuren von Bilinearformen definieren, obwohl Spuren normalerweise nur für Endomorphismen definiert sind. Ist $b\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n) \to \mathbb{R}$ eine solche Bilinearform und sind $\{X_i\}_i$ Basis-Vektorfelder, so ist die **Spur** von b bezüglich g definiert durch

$$\big(\operatorname{tr}_g b\big)(p) := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\, b_{ij}(p)\,,$$

wobei $b_{ij}(p) = b(X_i(p), X_j(p))$ und $(g^{ij}(p))_{i,j} = (g_{ij}(p))^{-1}$ mit $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$.

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zwei Mannigfaltigkeiten und $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine glatte Abbildung. Das **Differential von F im Punkt p** ist definiert als Abbildung

$$\mathrm{d}F_p\colon T_p\mathcal{M} \to T_{F(p)}\mathcal{N}\,, \qquad \big(\mathrm{d}F_p(\xi)\big)(f) := \xi(f \circ F)\,, \qquad \xi \in T_p\mathcal{M}\,, \quad f \in C^\infty(\mathcal{M})\,.$$

Ist F ein Diffeomorphismus, so lässt sich ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *vorwärts transportieren* zu einem Vektorfeld $F_*X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ durch

$$(F_*X)_q := \mathrm{d}F_{F^{-1}(q)}\big(X_{F^{-1}(q)}\big) \in T_q\mathcal{N}\,.$$

F_* nennt man auch einen **Pushforward**. Im Fall einer beliebigen Abbildung F lassen sich k-Formen durch das Differential von F *zurückziehen*. Für einen $(0,k)$-Tensor $\omega \in \mathfrak{X}^0_k(\mathcal{N})$ ist durch

$$(F^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{F(p)}\big(\mathrm{d}F_p(\xi_1), \dots, \mathrm{d}F_p(\xi_k)\big)\,, \qquad \xi_1, \dots, \xi_k \in T_p\mathcal{M}\,,$$

der zurückgezogene $(0,k)$-Tensor $F^*\omega \in \mathfrak{X}^0_k(\mathcal{M})$ definiert. Wir bezeichnen F^* deshalb auch als **Pullback**.

Weiter lassen sich Integrale auf *orientierbaren* Mannigfaltigkeiten einführen. Unter einer **Orientierung** auf $\mathcal{M}$ versteht man eine Äquivalenzklasse von Überdeckungen von $\mathcal{M}$ mit Karten, deren Jacobische der Koordinatenwechsel positive Determinante besitzen. Existieren solche Überdeckungen, so nennt man $\mathcal{M}$ **orientierbar**. Alternativ lässt sich die Existenz einer Überdeckung lokaler Basen von Vektorfeldern fordern, deren Basiswechsel positive Determinanten besitzen. Eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung für die Orientierbarkeit von $\mathcal{M}$ ist die Existenz einer **Volumenform** (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 15.5]), d. h. einer nirgends verschwindenden n-Form über $\mathcal{M}^n$. Auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Rand induziert eine Orientierung von $\mathcal{M}$ eine Orientierung von $\partial\mathcal{M}$, welche die Orientierung von $\mathcal{M}$ mit einem nach außen gerichteten Vektorfeld reproduziert (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 15.24]). Für eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}^n, g)$ gibt es eine ausgezeichnete Volumenform $\mathrm{d}\mu_g$, welche

$$\mathrm{d}\mu_g(X_1, \dots, X_n) = 1$$

für jeden Satz von orientierten orthonormierten Basis-Vektorfeldern $X_1, \dots, X_n$ erfüllt (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 15.29]). Diese nennt man auch eine **riemannsche Volumenform**. In lokalen Koordinaten besitzt diese die Darstellung (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 15.31])

$$\mathrm{d}\mu_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\ \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n\,.$$

Für die auf dem Rand $\partial\mathcal{M}$ induzierte riemannsche Volumenform schreiben wir dann $\mathrm{d}\mu_{\partial g}$.

Einzig n-Formen sind geeigneten geometrische Objekte auf $\mathcal{M}^n$, welche sich integrieren lassen. Besitzt $\omega \in \Lambda^n(\mathcal{M}^n)$ kompakten Träger in der Kartenumgebung U einer Karte (U, x) mit lokaler Darstellung $\omega = f\ \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$, so definiert man das Integral von ω durch

$$\int_{\mathcal{M}^n} \omega := \int_{x(U)} (x^{-1})^*\omega := \int_{x(U)} f(x^1, \dots, x^n)\ \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n\,.$$

Das Integral allgemeiner n-Formen mit kompaktem Träger definiert man dann mittels Teilung der Eins gegenüber eines orientierten Atlasses, sodass die Summe der einzelnen Integrale wegen der gewählten Orientierung wohldefiniert ist (siehe [*Lee, 2013*, Proposition 16.5]).

A.2. Vektorbündel

In Kapitel A.1 haben wir mit dem Tangentialbündel, dem Kotangentialbündel und allgemein den Tensorbündeln einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ bereits Beispiele von *Vektorbündeln* kennengelernt. Nun geben wir deren allgemeine Definition sowie weitere Beispiele und Konstruktionen an.

Unter einem **Faserbündel** verstehen wir ein Tupel $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$. Dabei sind $\mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{F}$ Mannigfaltigkeiten und $\pi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ eine glatte surjektive Abbildung, sodass die Mengen $\pi^{-1}(p)$ für ein beliebiges $p \in \mathcal{M}$ diffeomorph zu $\mathcal{F}$ sind. Man nennt dann $\mathcal{E}$ den **Totalraum**, $\mathcal{M}$ den **Basisraum**, π die **Projektion** und $\mathcal{F}$ den **Fasertyp** des Faserbündels. Weiter bezeichnen wir $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$ für $p \in \mathcal{M}$ als die **Fasern** des Faserbündels.

Ein Faserbündel $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ bezeichnet man auch als **lokal-trivial**, falls es zu jedem $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung $U \subset \mathcal{M}$ und einen Diffeomorphismus $\Phi_U \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathcal{F}$ gibt, sodass $\pi_1 \circ \Phi_U = \pi$. Die Abbildungen Φ_U nennt man dann auch **lokale Trivialisierungen** oder **Bündelkarten**.

A.2.1 Definition (Vektorbündel)
Ein (**glattes, reelles**) **Vektorbündel vom Rang k über $\mathcal{M}$** ist ein lokal-triviales Faserbündel $\pi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$, welches als Fasertyp einen k-dimensionalen Vektorraum besitzt, zu welchem die Fasern isomorph sind (siehe Bild A.2). Das heißt:

(i) Für alle $p \in \mathcal{M}$ ist $\mathcal{E}_p$ ein k-dimensionaler reeller Vektorraum.

(ii) Für alle $p \in \mathcal{M}$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathcal{M}$ und einen Diffeomorphismus

$$\Phi_U \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k , \qquad \Phi_U(\xi) = \big(\pi(\xi), \varrho(\xi)\big) ,$$

wobei $\varrho \colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$ eingeschränkt auf $\mathcal{E}_p$ für alle $p \in U$ ein Vektorraumisomorphismus ist. ♦

Für weitere Informationen zu der Definition und den folgenden Konstruktionen sei auf [*Lee, 2013*, Chapter 10] und [*Waldmann, 2007*, Kapitel 2.2] verwiesen. Es gibt verschiedene Methoden, Vektorbündel durch „Zusammenkleben" von Fasern und gleichermaßen aus bereits bestehenden Vektorbündeln zu konstruieren. Dazu zählen unter anderem direkte Summen und Tensorprodukte von Vektorbündeln, das duale Vektorbündel sowie das Homomorphismenbündel.

Es seien Vektorbündel $\pi_1 \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{M}$ und $\pi_2 \colon \mathcal{E}_2 \to \mathcal{M}$ gegeben. Dann ist die **direkte Summe**, auch **Whitney-Summe** genannt, $\boldsymbol{\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2}$ definiert durch

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 := \coprod_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_{1p} \oplus \mathcal{E}_{2p} , \qquad \text{sodass} \quad (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)_p = \mathcal{E}_{1p} \oplus \mathcal{E}_{2p} .$$

Ebenso definiert man das **Tensorprodukt** $\boldsymbol{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2}$ durch

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 := \coprod_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_{1p} \otimes \mathcal{E}_{2p} , \qquad \text{sodass} \quad (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)_p = \mathcal{E}_{1p} \otimes \mathcal{E}_{2p} .$$

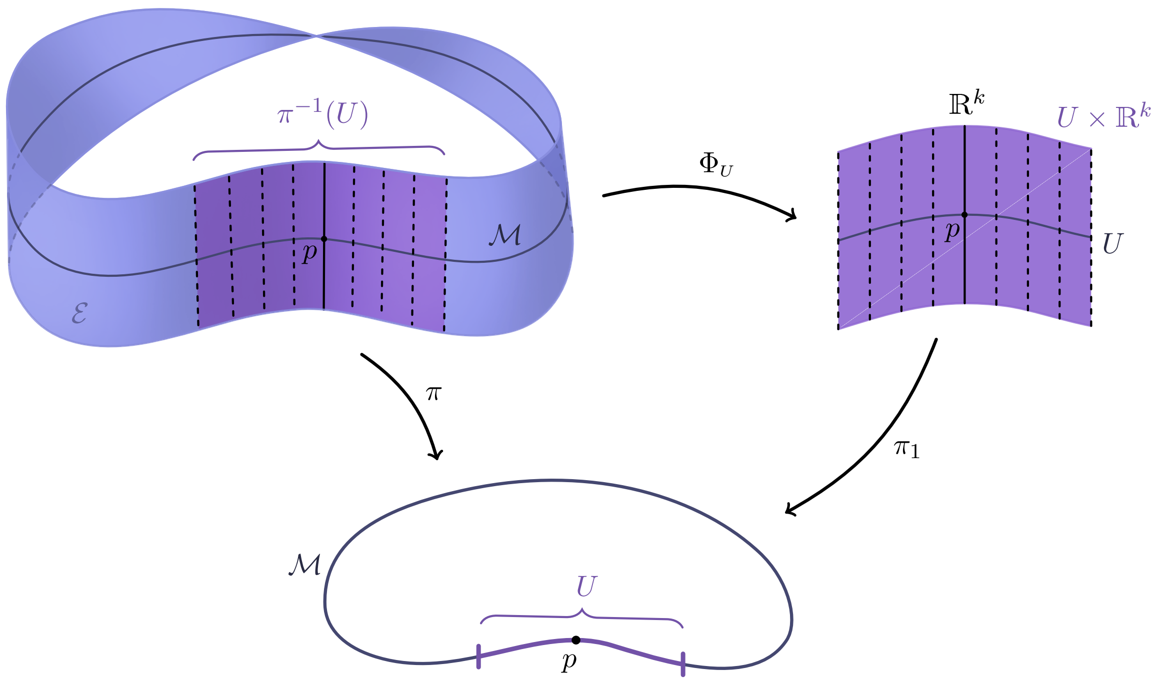


Bild A.2: Veranschaulichung der Definition eines Vektorbündels $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ mit lokaler Trivialisierung Φ_U

Das **duale Vektorbündel $\boldsymbol{\mathcal{E}^*}$** eines Vektorbündels $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ ist wiederum gegeben durch

$$\mathcal{E}^* := \coprod_{p\in\mathcal{M}} (\mathcal{E}_p)^*, \qquad \text{sodass} \quad \mathcal{E}^*_p := (\mathcal{E}^*)_p = (\mathcal{E}_p)^*.$$

Weiter kann man für das Vektorbündel $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ das assoziierte **Tensorbündel $\boldsymbol{\mathcal{E}^r_s}$ vom Typ $\boldsymbol{(r, s)}$** bilden durch

$$\mathcal{E}^r_s := \underbrace{\mathcal{E}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}}_{r\text{-fach}} \otimes \underbrace{\mathcal{E}^*\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}^*}_{s\text{-fach}}.$$

Mit diesen Konstruktionen lassen sich also auch das Kotangential- und die Tensorbündel vom Typ (r, s) durch

$$T^*\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^* \qquad \text{und} \qquad T^r_s\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^r_s$$

aus dem Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ wiedergewinnen. Als letztes definiert sich das **Homomorphismenbündel $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{E}_1}, \boldsymbol{\mathcal{E}_2})$** durch

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) := \coprod_{p\in\mathcal{M}} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{1p}, \mathcal{E}_{2p}) \cong \mathcal{E}^*_1 \otimes \mathcal{E}_2, \qquad \text{sodass} \quad \big(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\big)_p = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{1p}, \mathcal{E}_{2p}).$$

Eine weitere Vorschrift für die Konstruktion eines Vektorbündels durch das *Zurückziehen* eines bestehenden Vektorbündels wird in Kapitel A.4 ausführlicher erklärt.

Als (**globalen**) **Schnitt** eines Vektorbündels $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ bezeichnet man eine glatte Abbildung $X\colon \mathcal{M} \to \mathcal{E}$, sodass $\pi \circ X = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$, also $X_p := X(p) \in \mathcal{E}_p$. Ist X nur auf einer offenen Teilmenge

$U \subset \mathcal{M}$ definiert, so bezeichnet man den Schnitt auch als **lokal**. Die Menge aller Schnitte wird mit $C^\infty(\mathcal{E})$ bezeichnet, die Menge aller lokalen Schnitte mit $C^\infty(\mathcal{E}_U)$ oder $C^\infty(U, \mathcal{E})$. Ein (**globaler**) **Frame** ist eine Menge $\{E_i\}_i \subset C^\infty(\mathcal{E})$, welche, eingeschränkt auf $\mathcal{E}_p$, für alle $p \in \mathcal{M}$ eine Basis von $\mathcal{E}_p$ bildet. Der Frame heißt **lokal**, falls alle E_i auf einer offenen Menge $U \subset \mathcal{M}$ definiert sind. Nach [*Lee, 2013*, Example 10.18 und Proposition 10.19] erzeugt jede Bündelkarte einen lokalen Frame und umgekehrt erzeugt jeder lokale Frame eine Bündelkarte, sodass man nicht zwischen beiden Begriffen unterscheiden braucht.

Vektor-, Kovektor- und Tensorfelder sind also, wie bereits erwähnt wurde, Schnitte der entsprechenden Bündel. Die lokalen Koordinatenvektorfelder wiederum definieren lokale Schnitte des Tangentialbündels, welche zusammen lokale Frames ergeben.

Ebenso lässt sich der Begriff einer Metrik auf Vektorbündel erweitern. Unter einer (**Bündel-**) **Metrik** versteht man ein Element $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$, welches symmetrisch und positiv definit ist, sodass $g(X,Y) = g(Y,X)$ und $g(X,X) > 0$, falls $X \neq 0$, für $X, Y \in C^\infty(\mathcal{E})$ gelten. Für $\mathcal{E} = T\mathcal{M}$ stimmt die Definition also mit derjenigen der riemannschen Metrik überein. Alternativ schreiben wir auch hier $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_g$ für $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. Außerdem nennen wir einen Frame $\{E_i\}_i \subset C^\infty(\mathcal{E})$ **orthonormal**, falls $\langle E_i, E_j\rangle_g = \delta_{ij}$.

A.3. Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Zusammenhänge auf Vektorbündeln erweitern den Begriff der Ableitung für Schnitte von Vektorbündeln und damit insbesondere auch für Vektorfelder. Um Schnitte von Vektorbündeln ableiten zu können, bedarf es der Differenz von Elementen unterschiedlicher Fasern. Die Möglichkeit unterschiedliche Fasern des Vektorbündels vergleichen zu können, wird erst durch Zusammenhänge ermöglicht. Sie stellen eine zusätzliche geometrische Struktur für Vektorbündel dar, welche es auch erlaubt, von *Krümmungen* dieser sprechen zu können (siehe dazu Kapitel A.5).

A.3.1 Definition (Zusammenhang)
Sei $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ ein Vektorbündel. Ein **Zusammenhang** auf $\mathcal{E}$, welcher oft auch eine **kovariante Ableitung** genannt wird, ist eine Abbildung

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{E})\,, \qquad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y\,,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\nabla_X Y$ ist linear über $C^\infty(\mathcal{M})$ in X:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y \;=\; f\,\nabla_{X_1} Y + g\,\nabla_{X_2} Y \qquad \text{für } f, g \in C^\infty(\mathcal{M})\,,$$

(ii) $\nabla_X Y$ ist linear über $\mathbb{R}$ in Y:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) \;=\; a\,\nabla_X Y_1 + b\,\nabla_X Y_2 \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}\,,$$

(iii) ∇ erfüllt die Produktregel:

$$\nabla_X(fY) \;=\; f\,\nabla_X Y + (Xf)\,Y \qquad \text{für } f \in C^\infty(\mathcal{M})\,.$$

Einen Zusammenhang auf $\mathcal{E} = T\mathcal{M}$ nennt man auch einen **linearen Zusammenhang**. ♦

Ein Zusammenhang ist wegen ((i)) insbesondere tensoriell im ersten Argument, hängt als nur vom Wert X_p von X in $p \in \mathcal{M}$ ab. Aufgrund der Produktregel ((iii)) ist der Zusammenhang aber auch im zweiten Argument lokal. Es lässt sich zeigen, dass der Wert von $\nabla_X Y$ im Punkt $p \in \mathcal{M}$ nur von dem Wert von X in p und von den Werten von Y in einer Umgebung von p abhängt (siehe [*Lee, 1997*, Lemma 4.2]). Das heißt, für $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $\tilde{Y} \in C^\infty(\mathcal{E})$ mit $X(p) = \tilde{X}(p)$ und $Y = \tilde{Y}$ in einer Umgebung von p gilt

$$\nabla_X Y\big|_p \;=\; \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\big|_p \,.$$

Insbesondere können wir den Ausdruck $\nabla_X Y|_p$ formal durch $\nabla_\xi Y$ ersetzen für $\xi \in T_p\mathcal{M}$ mit $\xi = X_p$. Der formale Ausdruck $\nabla_\xi Y$ ist dann in dem Sinne wohldefiniert, dass nach [*Lee, 2013*, Lemma 10.12] eine Fortsetzung von ξ zu einem Vektorfeld in eine Umgebung von $p \in \mathcal{M}$ existiert. Nach der Lokalität ist der Ausdruck unabhängig von dieser Fortsetzung.

Ist ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $\mathcal{E}$ gegeben, so lassen sich damit Zusammenhänge auf den aus Kapitel A.2 beschriebenen assoziierten Tensorbündeln von $\mathcal{E}$ definieren (siehe [*Lee, 1997*, Lemma 4.6]). So erzeugt ∇ beispielsweise einen Zusammenhang auf $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ (wird hier auch mit ∇ bezeichnet) durch

$$(\nabla_X g)(Y,Z) \;:=\; X\big(g(Y,Z)\big) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \qquad \text{für } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \text{ und } Y,Z \in C^\infty(\mathcal{E})\,,$$

wobei $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$. Ist eine Bündelmetrik g auf $\mathcal{E}$ gegeben, so nennen wir das Vektorbündel **riemannsch**, falls g **kompatibel** mit dem Zusammenhang ∇ ist, das heißt, falls $\nabla_X g = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt. Damit gilt insbesondere

$$X\big(g(Y,Z)\big) \;=\; g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \qquad \text{für } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \text{ und } Y,Z \in C^\infty(\mathcal{E})\,.$$

Auf dem Homomorphismenbündel $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ zweier Vektorbündel $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ über $\mathcal{M}$ mit Zusammenhängen $\nabla^{\mathcal{E}_1}$ und $\nabla^{\mathcal{E}_2}$ lässt sich ebenso ein Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}$ definieren durch

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{H}} \colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty\big(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\big) &\to C^\infty\big(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\big)\,, \\ \big(\nabla^{\mathcal{H}}_X S\big)(Y) &:= \nabla^{\mathcal{E}_2}_X\big(S(Y)\big) - S(\nabla^{\mathcal{E}_1}_X Y)\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Für lineare Zusammenhänge über riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt es ein bekanntes Resultat, welches die Existenz eines kompatiblen Zusammenhangs garantiert. Dies ist der *Levi-Civita-Zusammenhang*, welcher sich koordinatenunabhängig durch die *Koszul-Formel* (siehe [*Lee, 1997*, Equation (5.1)]) oder bezüglich der Koordinatenframes explizit durch Angabe der *Christoffel-Symbole* definieren lässt. Dabei versteht man unter den **Christoffel-Symbolen** die Komponentenfunktionen Γ^k_{ij} eines linearen Zusammenhangs bezüglich eines lokalen Frames $\{E_i\}_i$, welche durch die Relation

$$\nabla_{E_i} E_j \;=\; \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\, E_k$$

definiert sind. Der Levi-Civita-Zusammenhang stellt die kanonische Wahl eines linearen Zusammenhangs auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit dar.

A.3.2 Satz (Fundamentallemma der riemannschen Geometrie)
Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger linearer Zusammenhang ∇ auf $T\mathcal{M}$, welcher kompatibel mit g und torsionsfrei ist, d. h.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y] \qquad \textit{für alle } X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,.$$

Dieser Zusammenhang heißt auch ***Levi-Civita-Zusammenhang****. Für den zu einer Karte (U, x) von $\mathcal{M}^n$ zugehörigen Koordinatenframe berechnen sich die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs zu*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}(p) \big((\partial_i g_{j\ell})(p) + (\partial_j g_{i\ell})(p) - (\partial_\ell g_{ij})(p) \big)$$

mit $\partial_i = \partial_{x^i}$, $g_{ij}(p) = g(\partial_i|_p, \partial_j|_p)$ und $g^{ij}(p) = (g_{ij}(p))^{-1}$.

Beweis: Der Beweis ist nachzulesen in [*Lee, 1997*, Theorem 5.4]. □

In der Theorie der Levi-Civita-Zusammenhänge ist es möglich, für lokale Berechnungen besonders geeignete Koordinaten für eine riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}^n, g)$ anzugeben. Eine solche Karte (U, x) um $p \in \mathcal{M}^n$ nennt man **riemannsche Normalkoordinaten** und sie erfüllt (siehe [*Jost, 2005*, Theorem 1.4.4])

$$x(p) = 0\,, \qquad g_{ij}(p) = \delta_{ij}\,, \qquad \partial_k g_{ij}(p) = 0\,, \qquad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \qquad \text{für } i, j, k = 1, \ldots, n\,.$$

A.4. Zurückgezogene Vektorbündel

Wir erweitern die Beschreibungen aus Kapitel A.2 und A.3 noch um eine weitere Konstruktionsmöglichkeit von Vektorbündeln, auf welche wir hier etwas genauer eingehen wollen. Dabei handelt es sich um das *Zurückziehen* von Vektorbündeln.

Gegeben seien Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$, eine glatte Funktion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sowie ein Vektorbündel $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ vom Rang k über $\mathcal{N}$.

A.4.1 Definition (Pullback-Bündel)
Als **Pullback-Bündel** bezeichnen wir das Vektorbündel $\pi^*\colon f^*\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ mit Totalraum

$$f^*\mathcal{E} := \coprod_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_{f(p)} = \big\{ (p, \xi) \in \mathcal{M} \times \mathcal{E} : f(p) = \pi(\xi) \big\} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{E}$$

und Projektion π^* als Projektion in der ersten Komponente, welche die Fasern $(f^*\mathcal{E})_p = \mathcal{E}_{f(p)}$ auf p abbildet. ⧫

Das Pullback-Bündel ist in der Tat auch ein Vektorbündel. Für eine Bündelkarte (V, Ψ) von $\mathcal{E}$ erhalten wir eine Bündelkarte (U, Φ) von $f^*\mathcal{E}$, wobei $U = f^{-1}(V) \subset \mathcal{M}$ und

$$\Phi\colon (\pi^*)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k\,, \qquad (p, \xi) \mapsto \Big(p, (\pi_2 \circ \Psi)\big|_{f(p)}(\xi) \Big)\,.$$

π_2 beschreibt dabei die Projektion auf die zweite Komponente. Nach [*Lee, 1997*, Lemma 2.2] oder [*Lee, 2013*, Lemma 10.6] ist das Pullback-Bündel dann ein Vektorbündel vom Rang k.

Schnitte von $\mathcal{E}$ induzieren Schnitte von $f^*\mathcal{E}$. Es sei $X \in C^\infty(\mathcal{E})$ ein Schnitt von $\mathcal{E}$. Wir bezeichnen mit $X^* := X \circ f \in C^\infty(f^*\mathcal{E})$ den von X **induzierten Schnitt** auf $f^*\mathcal{E}$. Ebenso überträgt sich dieser Vorgang auf allen zu $\mathcal{E}$ assoziierten Tensorbündeln, da die Pullback-Operation mit Tensorprodukten und Dualitäten kommutiert. So induziert beispielsweise eine Bündelmetrik $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$ auf $\mathcal{E}$ eine Bündelmetrik $g^* \in C^\infty((f^*\mathcal{E})^* \otimes (f^*\mathcal{E})^*) \cong C^\infty(f^*(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*))$ auf $f^*\mathcal{E}$, welche charakterisiert ist durch $g(X,Y) \circ f = g^*(X^*, Y^*)$ für $X, Y \in C^\infty(\mathcal{E})$. Wir nennen g^* die von g **induzierte Metrik** auf $f^*\mathcal{E}$.

Ist ferner ein Zusammenhang ∇ auf $\mathcal{E}$ gegeben, dann lässt sich auch dieser auf $f^*\mathcal{E}$ zurückziehen. Nach [Baker, 2010, Proposition 2.2] gibt es einen eindeutig bestimmten Zusammenhang ∇^* auf $f^*\mathcal{E}$, den **Pullback-Zusammenhang**, welcher für alle $p \in \mathcal{M}$ und $\xi \in T_p\mathcal{M}$ durch

$$\nabla^*_\xi X_f \;=\; \nabla_{f_*\xi} X \;\in \mathcal{E}_{f(p)} \;=\; (f^*\mathcal{E})_p\,,$$

charakterisiert wird. Die Ausdrücke sind dabei im Sinne der Lokalität von Zusammenhängen zu verstehen.

Es zeigt sich, dass der Pullback-Zusammenhang in dem Sinne natürlich ist, dass er eine gegebene riemannsche Struktur erhält. Das bedeutet, ist ∇ kompatibel mit einer Bündelmetrik g, so ist auch ∇^* mit der induzierten Bündelmetrik g^* kompatibel (siehe [Baker, 2010, Proposition 2.3] oder [Persson, 2003, Theorem 2.5]).

A.5. Krümmungen von Vektorbündeln und Laplace-Operatoren auf Vektorbündeln

Ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ ermöglicht den Zugang, Elemente unterschiedlicher Fasern von $\mathcal{E}$ zu vergleichen. Diese lassen sich in einer von ∇ vorgegebenen Art und Weise entlang von Kurven auf $\mathcal{M}$ verschieben. Dies nennt man *Parallel-Transport* (siehe [*Lee, 1997*, Seite 59 ff.] oder [*Kobayashi und Nomizu, 1963*, Kapitel III.4]). Das Maß, wie sich ein Faserelement aus $\mathcal{E}_{p_1}$, welches entlang zweier unterschiedlicher Kurven nach $\mathcal{E}_{p_2}$ parallel verschoben wird, verändert, wird als *Krümmung* verstanden. Veränderungen von Paralleltransporten gehen einher mit *zweiten kovarianten Ableitungen*. Die Anwesenheit von Krümmung äußert sich dann darin, dass zweite kovariante Ableitungen in den Ableitungsrichtungen nicht kommutieren.

Für den Zusammenhang ∇ auf dem Vektorbündel $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ definieren wir die **zweite kovariante Ableitung** als Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla^2\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{E})\,, \\ \nabla^2_{X,Y} Z \;:=\; \Big(\nabla^{\mathcal{H}}_X\big(A \mapsto \nabla_A Z\big)\Big)(Y) \;=\; \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z\,,\end{aligned}$$

wobei $\nabla^{\mathcal{H}}$ den Zusammenhang auf dem Homomorphismenbündel $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ aus Gleichung (A.1) meint. Diese besitzt ähnliche Eigenschaften wie ein Zusammenhang. Insbesondere ist diese

$C^\infty(\mathcal{M})$-linear in den ersten beiden Argumenten und erfüllt die Produktregel ((iii)) aus Definition A.3.1 im letzten Argument.

A.5.1 Definition (Krümmungstensor)
Der **Krümmungstensor** $\boldsymbol{R}_\nabla$ eines Zusammenhangs ∇ auf dem Vektorbündel $\mathcal{E}$ ist definiert als Vertauschungsrelation

$$R_\nabla \colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{E})\,,$$
$$R_\nabla(X,Y)Z := \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}Z\,.$$

♦

[*Lee, 1997*, Proposition 7.1] zeigt, dass R_∇ in der Tat auch tensoriell ist, sodass $(R_\nabla(X,Y)Z)(p)$ nur von X_p, Y_p und Z_p abhängt. Für den Fall einer riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ mit $\mathcal{E} = T\mathcal{M}$ und ∇ als Levi-Civita-Zusammenhang wird R_∇ oft auch als **riemannscher Krümmungstensor** bezeichnet und es gilt

$$R_\nabla(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad \text{für } X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,.$$

Bezüglich eines Koordinatenframes $\{\partial_{x^i}\}_i$ um $p \in \mathcal{M}^n$ besitzt R_∇ die Komponenten

$$R_{\nabla}{}_{ijk}{}^{\ell}(p) := \partial_{x^i}\Gamma^\ell_{kj} - \partial_{x^j}\Gamma^\ell_{ki} + \sum_{r=1}^n \Big(\Gamma^\ell_{ri}\,\Gamma^r_{kj} - \Gamma^\ell_{rj}\,\Gamma^r_{ki}\Big)\,.$$

Oftmals wird auch der $(0,4)$-Tensor

$$\mathrm{Riem}(X,Y,Z,W) := \big\langle R_\nabla(X,Y)Z, W\big\rangle_g \qquad \text{für } X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

als **riemannscher Krümmungstensor** bezeichnet und R_∇ lediglich als *Krümmung*. In [*Lee, 1997*, Seite 121 ff.] liest man die Symmetrieeigenschaften von Riem nach. Wegen der Antisymmetrie in den ersten beiden bzw. letzten beiden Einträgen stellt

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr}_g\Big((A,B) \mapsto \mathrm{Riem}(A,X,Y,B)\Big) = \mathrm{tr}_g\Big((A,B) \mapsto \mathrm{Riem}(X,A,B,Y)\Big)$$

die einzige Möglichkeit dar, eine nichttriviale Spur über Riem zu bilden. Der so erhaltene $(0,2)$-Tensor Ric wird auch als **Ricci-Tensor** oder **Ricci-Krümmung** bezeichnet. Durch erneute Spurbildung

$$S := \mathrm{tr}_g\,\mathrm{Ric} = \mathrm{tr}_g\Big((X,Y) \mapsto \mathrm{Ric}(X,Y)\Big)$$

erhält man die **skalare Krümmung**. Bei zweidimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert man als **Gauß-Krümmung** die Größe

$$K := \frac{\mathrm{Riem}(X,Y,Y,X)}{|X|^2_g\,|Y|^2_g - \langle X,Y\rangle^2_g}\,,$$

wobei $\{X,Y\} \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^2)$ ein beliebiger Frame ist. Die Gauß-Krümmung K hängt mit der skalaren Krümmung S durch die Relation $S = 2K$ zusammen. Als Verallgemeinerung der Gauß-Krümmung auf beliebig dimensionale Mannigfaltigkeiten führt man die **Schnittkrümmung** bezüglich einer Schar von zweidimensionalen Teilräumen der Tangentialräume ein, welche von zwei Vektorfeldern aufgespannt werden und setzt

$$K(X,Y) := \frac{\mathrm{Riem}(X,Y,Y,X)}{|X|_g^2\,|Y|_g^2 - \langle X,Y\rangle_g^2} \qquad \text{für linear unabhängige } X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\,.$$

Neben den Krümmungen lassen sich auch Differentialoperatoren zweiter Ordnung aus der zweiten kovarianten Ableitung gewinnen. Analog zum Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$, welcher als Spur der Hesse-Matrix definiert ist, lässt sich ein Laplace-Operator auf Vektorbündeln als Spur der zweiten kovarianten Ableitung definieren.

A.5.2 Definition (Laplace-Operator auf Vektorbündeln)
Als **Laplace-Operator** auf dem Vektorbündel $\mathcal{E}$ mit Zusammenhang ∇ einer riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}^n, g)$ definieren wir die Spur der zweiten kovarianten Ableitung

$$\Delta_g\colon C^\infty(\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{E})\,, \qquad \Delta_g\, Z := \mathrm{tr}_g\Big((X,Y) \mapsto \nabla^2_{X,Y} Z\Big)\,.$$

Lokal hat der Laplace-Operator dann die Form

$$\text{(A.2)} \qquad \big(\Delta_g\, Z\big)(p) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\, \nabla^2_{E_i,E_j} Z\big|_p \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\, \Big(\nabla_{E_i}\big(\nabla_{E_j} Z\big) - \nabla_{\nabla_{E_i}E_j} Z\Big)\Big|_p\,,$$

wobei $\{E_i\}_i \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$ ein lokaler Frame um $p \in \mathcal{M}^n$ ist und $(g^{ij}(p))_{i,j} = (g_{ij}(p))^{-1}$ mit $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$. ♦

Mit dem Vektorbündel-Laplace-Operator lässt sich ferner auch der **Laplace-Beltrami-Operator** auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ reproduzieren. Dieser ist üblicherweise definiert als (siehe [*Jost, 2005*, Definition 2.1.2])

$$\Delta_g\, f \;:=\; \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) \qquad \text{für } f \in C^\infty(\mathcal{M})\,.$$

Bezüglich einer Karte (U, x) um $p \in \mathcal{M}^n$ ist $\Delta_g f$ von der Form (siehe [*Jost, 2005*, Page 88])

$$\Delta_g\, f(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{G(p)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg(\sqrt{G(p)}\;\, g^{ij}(p)\, \frac{\partial}{\partial x^j} f\bigg)\bigg|_p\,,$$

wobei $G(p) := \det(g_{ij}(p))_{ij}$ und $(g^{ij}(p))_{ij} = (g_{ij}(p))^{-1}_{ij}$.

Betrachtet man nun $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ als Vektorbündel über $\mathcal{M}$, dessen Schnitte $C^\infty(\mathcal{E}) \cong C^\infty(\mathcal{M})$ in einer eins-zu-eins Korrespondenz zu den glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$ stehen, zusammen mit dem Zusammenhang $\nabla_X f := X(f)$, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $f \in C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R})$, und der Bündel-Metrik $g(f,h) := fh$, so erhält man ein riemannsches Vektorbündel, was leicht aus der Derivationseigenschaft von Vektorfeldern folgt. Nach der *Weitzenböck Formel* (siehe [*Jost, 2005*, Theorem 3.3.3]) stimmt dann der Vektorbündel-Laplace-Operator mit dem Laplace-Beltrami-Operator überein.

Für diesen findet man mit der lokalen Darstellung aus Gleichung (A.2) dann ebenso bezüglich eines Koordinatenframes $\{\partial_{x^i}\}_i$

$$
\begin{aligned}
(\Delta_g f)(p) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \Big(\nabla_{\partial_{x^i}}(\nabla_{\partial_{x^j}} f) - \nabla_{\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j}} f\Big)\Big|_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(p) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(p) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(p)\, \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) \right).
\end{aligned}
$$

B. Funktionalanalytische Hilfsmittel

Funktionalanalysis ist die Theorie unendlichdimensionaler *Banachräume* wie beispielsweise spezieller *Funktionenräume* und linearen Abbildungen zwischen diesen. Resultate der abstrakten Funktionalanalysis liefern oftmals für die Analysis und Numerik wichtige Werkzeuge, um beispielsweise Lösungen partieller Differentialgleichungen untersuchen zu können. Wir wollen hier einen Überblick über die in der Arbeit verwendeten Begriffe und Resultate der Funktionalanalysis geben. Ein weiteres Ziel neben der Zusammenstellung notwendiger Resultate ist es auch, die in der Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen zu erklären.

In Kapitel B.1 werden wir dazu die Grundbegriffe und Definitionen von *Banach-* und *Hilberträumen* zusammenfassen und den wichtigen Begriff der *schwachen Konvergenz* erklären. In Kapitel B.2 wiederum beschreiben wir die *direkte Methode der Variationsrechnung*, welche als Strategie zum Finden von Minimierern von Funktionalen dient. Kapitel B.3 gibt einen Überblick über die in der Arbeit verwendeten Funktionenräume, wie beispielsweise den *Hölder-* und *Sobolev-Räumen*, und wie diese untereinander *eingebettet* sind. Im letzten Kapitel, Kapitel B.4, fassen wir schließlich die Grundbegriffe der Finite-Elemente-Methode zusammen, welche vor allem für das Verständnis von Kapitel 7.2 dienen. Für ausführlichere Erklärungen und Beschreibungen der Begriffe und Resultate verweisen wir auf die Literatur, im Speziellen auf [*Alt, 2012*], [*Evans, 1998*], [*Jost und Li-Jost, 1998*], [*Gilbarg und Trudinger, 2001*] und [*Weidmann, 1980*].

B.1. Banach- und Hilberträume

Wir beginnen in diesem Kapitel mit einem Überblick über einige Begriffe zu reellen normierten Vektorräumen. Neben den Begriffen der *Banach-* und *Hilberträume* erwähnen wir die Definitionen von *linearen Funktionalen* und *Dualräumen* dieser, aus welchen sich das Konzept der *schwachen Konvergenz* ergibt.

Als **normierten** (**Vektor-**)**Raum** bezeichnen wir ein Paar $(X, \|\cdot\|_X)$, wobei X ein Vektorraum ist und $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X. Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt **Banachraum**, falls die von $\|\cdot\|_X$ induzierte Normtopologie vollständig ist, sodass jede Cauchyfolge konvergiert. Ein **Hilbertraum** wiederum ist ein Paar $(X, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_X)$ bestehend aus einem Vektorraum X und einem Skalarprodukt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_X$, sodass die vom Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|_X := \sqrt{\langle\cdot\,,\cdot\rangle_X}$ $(X, \|\cdot\|_X)$ zu einem Banachraum macht.

Eine Teilmenge $M \subset X$ eines normierten Raumes X nennt man **dicht**, falls der Abschluss von M mit X übereinstimmt, also $\overline{M} = X$. Das heißt, zu jedem $x \in X$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \to x,\ k \to \infty$. Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt **separabel**, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge $M \subset X$ gibt. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $\|x\|_X \leq C$ für alle $x \in M$. M heißt wiederum (**folgen-**)**kompakt**, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine in M konvergente Teilfolge besitzt, das heißt, es gibt eine Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$

und ein $x \in M$, sodass $x_{k_\ell} \to x,\ \ell \to \infty$.

Ein (**stetiges**) **lineares Funktional** auf einem Banachraum X ist eine stetige lineare Abbildung $L\colon X \to \mathbb{R}$. Die Stetigkeit solcher Abbildungen ist äquivalent zu Beschränktheit (siehe [*Alt, 2012*, Lemma 3.1]). Dabei nennt man ein lineares Funktional **beschränkt**, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $|L(x)| \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Die Menge

$$X^* := \big\{L\colon X \to \mathbb{R} :\ L \text{ ist stetiges lineares Funktional}\big\}$$

aller stetigen linearen Funktionale auf X nennt man den **Dualraum** von X. Auf X^* wird durch

$$\|L\|_{X^*} := \inf\Big\{C :\ |L(x)| \leq C\|x\|_X \text{ für alle } x \in X\Big\} = \sup\Big\{\big|L(x)\big| :\ x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\Big\}$$

eine Norm definiert, sodass

$$\big|L(x)\big| \leq \|L\|_{X^*}\,\|x\|_X \qquad \text{für } x \in X \text{ und } L \in X^*$$

und welche $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ zu einem Banachraum macht (siehe [*Alt, 2012*, Satz 3.3 (2)]). Gebräuchlich ist oft auch die Notation $\langle L, x\rangle_{X^*,X} := L(x)$ für die duale Paarung von Elementen aus X und X^*.

Für Hilberträume $(X, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X)$ ermöglicht das Skalarprodukt eine kanonische Identifizierung des Dualraumes X^* mit X. Mit

$$J\colon X \to X^*\,, \qquad J(x)(y) := \langle x, y\rangle_X \quad \text{für } y \in X\,,$$

ist ein isometrischer Isomorphismus definiert (siehe [*Alt, 2012*, Satz 4.1] oder [*Weidmann, 1980*, Theorem 4.8]), das heißt, $x \mapsto \langle x, y\rangle_X$ definiert ein lineares Funktional auf X und umgekehrt gibt es zu jedem linearen Funktional $L \in X^*$ ein $x \in X$, sodass $L(y) = \langle x, y\rangle_X$. Das Attribut „isometrisch“ bedeutet dabei, dass $\|J(x)\|_{X^*} = \|x\|_X$ gilt. Das Resultat wird auch als **Darstellungssatz von Fréchet-Riesz** oder **Riesz'scher Darstellungssatz** bezeichnet.

Mithilfe linearer Funktionale lässt sich auf X neben der Normtopologie noch eine weitere Topologie definieren, die *schwache Topologie*. Dies ist die gröbste Topologie, also auch gröber als die Normtopologie, bezüglich der alle beschränkten linearen Funktionale aus X^* stetig sind (siehe auch [*Alt, 2012*, Abschnitt 6.7]). Die Konvergenz bezüglich dieser Topologie wird als **schwache Konvergenz** bezeichnet und ist charakterisiert durch

$$x_k \rightharpoonup x \in X\,,\ k \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, L \in X^* :\ L(x_k) \to L(x)\,,\ k \to \infty\,.$$

In einem Hilbertraum X ist die schwache Konvergenz nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz äquivalent zu $\langle y, x_k\rangle_X \to \langle y, x\rangle_X$, $k \to \infty$, für alle $y \in X$. Wie auch Norm-konvergente Folgen sind schwach konvergente Folgen stets beschränkt (siehe [*Alt, 2012*, Bem. 6.3 (5)]).

In Hilberträumen ist es mit dem isometrischen Isomorphismus $J\colon X \to X^*$ aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz stets möglich zu zeigen, dass die **kanonische Injektion**

$$\iota_X\colon X \to X^{**}\,, \qquad \iota_X(x)(L) := L(x)\,,$$

in den **Bidualraum** $X^{**} := (X^*)^*$ ein Isomorphismus ist (siehe [*Alt, 2012*, Beispiel 6.11 (1)]). Für beliebige Banachräume gilt a priori nur die Injektivität von ι_X. Ist diese also zusätzlich noch surjektiv, so nennt man den Banachraum **reflexiv**.

Analog zu linearen Funktionalen ist es auch bei linearen Operatoren $T\colon X \to Y$ zwischen Banachräumen X, Y möglich, von Stetigkeit zu reden, wenn diese beschränkt sind, das heißt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Eine besondere Klasse linearer Operatoren sind *kompakte* Operatoren. Dabei nennt man einen Operator $T\colon X \to Y$ **kompakt**, falls der Abschluss des Bildes der Einheitskugel, d. h. $\overline{T(B_1(0))} \subset Y$ mit $B_1(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\} \subset X$, kompakt ist. Äquivalent dazu ist die Charakterisierung, dass das Bild $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt (siehe [*Alt, 2012*, Abschnitt 8.1 (4)]). Die Kompaktheit von linearen Operatoren impliziert automatisch deren Stetigkeit.

Ein einfaches Beispiel von linearen Operatoren ist durch *stetige Einbettungen* gegeben. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass $X \subset Y$, dann nennt man den Einheitsoperator $\mathrm{id}_Y\big|_X\colon X \to Y$ eine **stetige Einbettung**, falls dieser stetig ist. Man schreibt dann auch $X \hookrightarrow Y$. Ist dieser kompakt, so nennt man die Einbettung **kompakt** und schreibt $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

B.2. Direkte Methode der Variationsrechnung

Die direkte Methode der Variationsrechnung nutzt das Prinzip der *lokalen schwachen Folgenkompaktheit reflexiver Banachräume*, um Minimierer von Funktionalen in geeigneten Klassen zu finden.

Ist ein Funktional F über einer Funktionenklasse $\mathcal{C}$ gegeben, so ist man daran interessiert, einen Minimierer $x_0 \in \mathcal{C}$ von F zu finden, sodass

$$x_0 \;=\; \inf_{x\in\mathcal{C}} F(x)\,.$$

Die Strategie der direkten Methode ist es, eine Minimalfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) \;=\; \inf_{x\in\mathcal{C}} F(x)$$

zu wählen und zu zeigen, dass eine Teilfolge gegen einen Minimierer in $\mathcal{C}$ konvergiert. Der Erfolg dieser Strategie hängt im Wesentlichen von zwei Punkten ab:

(i) die Wahl einer geeignet Topologie auf $\mathcal{C}$, welche eine Kompaktheitsbedingung ermöglicht, bezüglich welche eine Minimalfolge eine in $\mathcal{C}$ konvergente Teilfolge enthält,

(ii) die **Folgenunterhalbstetigkeit** des Funktionals bezüglich der in (i) gewählten Topologie, d. h.

$$F(x) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \qquad \text{für alle konvergenten Folgen } x_n \to x\,,$$

sodass der Grenzwert einer Minimalfolge auch F minimiert.

Die Topologie in Punkt (i) muss sorgfältig gewählt werden. Je schwächer die Topologie ist, desto einfacher ist es, Kompaktheit von Minimalfolgen sicherzustellen. Dagegen ist die Folgenunterhalbstetigkeit einfacher zu bekommen, je stärker die Topologie ist.

Es gilt, dass die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Raumes genau dann kompakt ist, wenn der normierte Raum endlichdimensional ist (siehe [*Alt, 2012*, Satz 2.10]). Somit eignet sich die Normtopologie meist nicht für die direkte Methode, da die verwendeten Funktionenklassen meist Teilmengen von unendlichdimensionalen Banach- oder Hilberträumen sind (vgl. mit den Beispielen aus Kapitel B.3). Für die schwache Topologie reflexiver Banachräume hingegen lässt sich Kompaktheit gewinnen.

B.2.1 Satz (Lokale schwache Folgenkompaktheit reflexiver Banachräume)
Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\} \subset X$ schwach folgenkompakt. Somit besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis: Siehe [*Alt, 2012*, Satz 6.10] oder [*Jost und Li-Jost, 1998*, Corollary 2.2.1]. Sei eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ gegeben. Im Beweis beschränkt man sich auf den Abschluss der linearen Hülle dieser Folge (wird mit Y bezeichnet), welcher separabel ist. Wegen der Reflexivität von X ist auch Y reflexiv (siehe [*Alt, 2012*, Abschnitt 6.8 (2)]), sodass Y^{**} ebenso separabel ist. Nach [*Alt, 2012*, Lemma 6.9] ist damit auch Y^* separabel. Auf Y^* wendet man die *schwach-$*$ Folgenkompaktheit* (siehe [*Alt, 2012*, Satz 6.5]) an, um ein Grenzelement einer Teilfolge in Y^{**} zu konstruieren, welches, auf X zurückgezogen, ein Grenzelement für eine Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ergibt. □

Das Prinzip der lokalen schwachen Folgenkompaktheit in reflexiven Banachräumen erlaubt es dann also, für, bezüglich der schwachen Topologie, folgenunterhalbstetige Funktionale die Existenz eines Minimierers zu zeigen.

B.2.2 Satz (Direkte Methode der Variationsrechnung)
Sei X ein reflexiver Banachraum und $F\colon X \to \mathbb{R}$ ein schwach folgenunterhalbstetiges Funktional, d. h.

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \qquad \text{für alle schwach konvergenten Folgen } x_n \rightharpoonup x\,.$$

Gibt es eine beschränkte Minimalfolge für F, dann gibt es einen Minimierer $x_0 \in X$, sodass

$$x_0 = \inf_{x\in\mathcal{C}} F(x)\,.$$

Beweis: Es sei auf einen Vergleich mit [*Jost und Li-Jost, 1998*, Theorem 4.2.1] hingewiesen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Minimalfolge für F. Mit der Reflexivität von X besitzt diese Minimalfolge nach Satz B.2.1 eine schwach konvergente Teilfolge. Nach Einschränkung auf diese gilt also $x_n \rightharpoonup x_0 \in X$. Mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von F erhalten wir dann

$$F(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{x\in X} F(x)\,,$$

sodass Gleichheit überall gilt und x_0 in der Tat ein Minimierer von F in X ist. □

Meist ist man daran interessiert, mit Minimierern von Funktionalen in bestimmten Funktionenklassen auch Lösungen der entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals zu finden. In ihrer schwachen Form lässt sich diese durch die *Gâteaux-Ableitung* beschreiben.

B.2.3 Definition (Gâteaux-Differenzierbarkeit)
Sei $f\colon M \subset X \to Y$ eine Abbildung einer offenen Teilmenge M eines Banachraumes X in einen anderen Banachraum Y. Die **Gâteaux-Ableitung** $\mathrm{d}_G f(x_0)(h)$ von f im Punkte $x \in M$ in Richtung h ist definiert als lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_G f(x_0)\colon X \to Y\,, \qquad \mathrm{d}_G f(x_0)(h) \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t}\,.$$

Existiert dieser Grenzwert für alle $h \in X$ und ist $\mathrm{d}_G f(x_0)$ stetig, so nennt man f auch **Gâteaux-differenzierbar in $\boldsymbol{x_0}$**. Ist f Gâteaux-differenzierbar für alle $x_0 \in M$, so nennt man die Funktion f **Gâteaux-differenzierbar**. Für $Y = \mathbb{R}$ schreibt man für die Gâteaux-Ableitung alternativ auch $\langle \mathrm{d}_G f(x_0), h\rangle$ im Sinne der dualen Paarung. ♦

Unter der **schwachen Euler-Lagrange-Gleichung** eines Funktionals $F\colon M \subset X \to \mathbb{R}$ versteht man das Verschwinden der Gâteaux-Ableitung für eine hinreichend große Klasse $W \subset X$ von Richtungen, d. h.

$$\Big\langle\, \mathrm{d}_G F(x)\,,\, h \Big\rangle \;=\; 0 \qquad \text{für alle } h \in W\,.$$

In der Tat stellen Minimierer $x_0 \in M$ eines Funktionals F auch Lösungen der schwachen Euler-Lagrange-Gleichung dar.

B.2.4 Satz
Sei $F\colon M \subset X \to \mathbb{R}$ ein Gâteaux-differenzierbares Funktional über einer offenen Teilmenge M des Banachraumes X. Ist $V \subset X$ ein affiner Teilraum von X und $x_0 \in M \cap V$ ein lokales Minimum von F in $M \cap V$, dann gilt für alle $h \in X$ mit $x_0 + th \in M \cap V$ für hinreichend kleine t

$$\Big\langle\, \mathrm{d}_G F(x_0)\,,\, h \Big\rangle \;=\; 0\,.$$

Beweis: Siehe auch [*Kurdila und Zabarankin, 2005*, Theorem 5.3.1]. □

B.3. Funktionenräume

Nach der abstrakten Theorie der letzten beiden Unterkapitel besprechen wir nun einige konkrete Beispiele von Banach- bzw. Hilberträume in der Form von Funktionenräumen. Neben den Räumen stetig differenzierbarer Funktionen fassen wir die Definitionen der Lebesgue- und Sobolev-Räume zusammen und erwähnen einige wichtige Einbettungsresultate.

Auf $\mathbb{R}^n$ nutzen wir für Ableitungen die Multiindex-Notation, sodass wir für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathrm{D}^\alpha u \;=\; \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u \;=\; \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \qquad \text{mit} \quad |\alpha| \;:=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

verstehen wollen für eine entsprechend differenzierbare Funktion u. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hier stets offen. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die **Räume stetig differenzierbarer Funktionen** als

$$\begin{aligned}
C^k(\Omega) &:= \big\{ u \colon \Omega \to \mathbb{R} : \ \mathrm{D}^\alpha u \text{ existiert und ist stetig für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le k \big\}\,, \\
C^k(\overline{\Omega}) &:= \big\{ u \in C^k(\Omega) : \ \mathrm{D}^\alpha u \text{ lässt sich stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzen für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le k \big\}\,, \\
C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega)\,, \\
C^\infty(\overline{\Omega}) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\overline{\Omega})\,.
\end{aligned}$$

Ist Ω zusätzlich beschränkt, so bildet $C^k(\overline{\Omega})$, $k < \infty$, zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \;:=\; \sum_{|\alpha| \le k} \|\,\mathrm{D}^\alpha u\|_{C^0(\overline{\Omega})}\,, \qquad \text{wobei} \quad \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \;:=\; \sup_{x \in \overline{\Omega}} \big|u(x)\big|\,,$$

einen Banachraum (siehe [*Alt, 2012*, Satz 1.1 und 1.6]). Unter dem Träger einer Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ verstehen wir die Menge

$$\operatorname{supp} u \;=\; \overline{\big\{ x \in \Omega : \ u(x) \neq 0 \big\}} \;\subset\; \Omega$$

und definieren dann die Räume stetig differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger als

$$\begin{aligned}
C_0^0(\Omega) &:= \big\{ u \in C^0(\Omega) : \ \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ ist kompakt} \big\}\,, \\
C_0^k(\Omega) &:= C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\,.
\end{aligned}$$

Für ein $0 \le \gamma \le 1$ nennen wir eine Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ **$\boldsymbol{\gamma}$-Hölder-stetig**, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\big|u(x) - u(y)\big| \;\le\; C\,|x - y|^\gamma \qquad \text{für alle } x, y \in \Omega\,.$$

Ist $\gamma = 1$, so heißt u auch **Lipschitz-stetig**. Die Abbildung

$$[\,\cdot\,]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \;\mapsto\; [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \;:=\; \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \;=\; \inf \Big\{ C > 0 : \ \big|u(x) - u(y)\big| \le C |x - y|^\gamma \Big\}$$

wird auch als **Hölder-Halbnorm** bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sind dann die **Hölder-Räume**

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \;:=\; \big\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : \ [\mathrm{D}^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty \text{ für alle } |\alpha| = k \big\}$$

zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \;:=\; \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [\mathrm{D}^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Banachräume (siehe [*Alt, 2012*, Satz 1.7]). In dieser Notation gilt $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$.

Andere Beispiele von Funktionenräume sind die *Lebesgue-* und *Sobolev-Räume*. In der Variationsrechnung sind viele Funktionale in Form von Integralen über Funktionen und deren Ableitungen formuliert. Integralnormen bieten daher einen natürlichen Rahmen, solche Variationsprobleme zu behandeln.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für eine bezüglich des Lebesgue-Maßes messbare Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir die $\boldsymbol{L^p}$**-Norm**

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega \big|u(x)\big|^p \;\mathrm{d}x \right)^{1/p}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty\,, \\ \inf \Big\{ \lambda : \big|u(x)\big| \leq \lambda \text{ f. ü. in } \Omega \Big\}, & \text{falls } p = \infty\,. \end{cases}$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die **Lebesgue-Räume** $\boldsymbol{L^p}$ definiert als Äquivalenzklassen von Funktionen mit beschränkter L^p-Norm, welchen sich nur auf Lebesgue-Nullmengen unterscheiden

$$L^p(\Omega) := \Big\{ u\colon \Omega \to \mathbb{R} : \; u \text{ messbar}, \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty \Big\} \Big/ \Big\{ u : \; \Omega \to \mathbb{R} : \; u \text{ messbar}, \; u = 0 \text{ f. ü.} \Big\},$$

sodass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ eine Norm auf $L^p(\Omega)$ ist. Dabei ist die Norm einer Funktionenklasse als Wert der Norm eines Repräsentanten zu verstehen, was nach Konstruktion von $L^p(\Omega)$ wohldefiniert ist. Somit wird $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ zu einem Banachraum (siehe [*Alt, 2012*, Satz 1.16 (1)]). Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)\, v(x) \;\mathrm{d}x$$

wird $L^2(\Omega)$ sogar zu einem Hilbertraum (siehe [*Alt, 2012*, Satz 1.16 (3)]). Dass das Produkt zweier L^2-Funktionen wieder integrierbar ist, ist ein Spezialfall der *Hölder-Ungleichung*.

B.3.1 Satz (Hölder-Ungleichung)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$ und $p^* \in [1, \infty]$ der zu p ***duale Exponent****, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, $p = 1$ und $p^* = \infty$ oder $p = \infty$ und $p^* = 1$ gilt. Das Produkt zweier Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^{p^*}(\Omega)$ erfüllt dann*

$$\big\|u \cdot v\big\|_{L^1(\Omega)} \leq \big\|u\big\|_{L^p(\Omega)} \big\|v\big\|_{L^{p^*}(\Omega)}\,,$$

sodass $uv \in L^1(\Omega)$.

Beweis: Für einen Beweis siehe [*Alt, 2012*, Lemma 1.18]. □

Weiter lassen sich zu zueinander duale Exponenten $p, q \in [1, \infty]$ Elemente aus $L^q(\Omega)$ durch die duale Paarung

$$\langle v, u \rangle_{L^q, L^p} := \int_\Omega u(x)\, v(x) \;\mathrm{d}x \qquad \text{für } u \in L^p(\Omega) \text{ und } v \in L^q(\Omega)$$

als lineare Funktionale auf $L^p(\Omega)$, also als Elemente des Dualraumes von $L^p(\Omega)$, auffassen. In der Tat gilt auch die Umkehrung.

B.3.2 Satz (Dualraum von L^p)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und p^* der zu p duale Exponent. Dann ist durch

$$J\colon L^{p^*}(\Omega) \to \big(L^p(\Omega)\big)^*, \qquad J(v)(u) := \langle v, u\rangle_{L^{p^*},L^p} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

ein linearer isometrischer Isomorphismus definiert.

Beweis: Den Beweis liest man in [*Alt, 2012*, Satz 4.12] nach. □

Satz B.3.2 enthält als Spezialfall für $p = 2$ den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz für $L^2(\Omega)$. Insbesondere zeigt die Dualität von L^p-Räumen deren Reflexivität für $1 < p < \infty$ (siehe auch [*Alt, 2012*, Beispiel 6.11 (2)]).

Mittels Faltungstheorie ist es möglich, beliebige L^p-Funktionen durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger zu approximieren. Das folgende Resultat zeigt, dass man $L^p(\Omega)$ als Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der L^p-Norm auffassen kann.

B.3.3 Satz (Approximation von L^p-Funktionen durch glatte Funktionen)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, das heißt, zu jedem $u \in L^p(\Omega)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$, sodass

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon\,.$$

Beweis: Siehe [*Alt, 2012*, Satz 2.15 (3)]. □

Als Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs auf L^p-Räume führt man *schwache Ableitungen* ein. Man definiert dann *Sobolev-Räume* als abgeschlossene Unterräume von $L^p(\Omega)$, in denen man *schwach ableiten* kann.

Es sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ nennt man eine Funktion $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, wobei

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \Big\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} :\ u|_K \in L^1(K),\ K \subset \Omega \text{ kompakt}\Big\}\Big/\Big\{u :\ \Omega \to \mathbb{R} :\ u \text{ messbar},\ u = 0 \text{ f. ü.}\Big\},$$

die **α-te schwache Ableitung** von $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls

$$\int_\Omega v(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, \mathrm{D}^\alpha \varphi(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Die schwache Ableitung fällt mit dem klassischen Ableitungsbegriff für stetig differenzierbare Funktionen zusammen. Man schreibt dann auch wieder $v = \mathrm{D}^\alpha u$ für die schwache Ableitung. Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p \le \infty$ definiert man dann den **Sobolev-Raum $W^{m,p}$** als

$$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{u \in L^p(\Omega) :\ \text{für alle } |\alpha| \le m \text{ existiert } \mathrm{D}^\alpha u \text{ und es ist } \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)\Big\}\,.$$

Auf $W^{m,p}(\Omega)$ erhält man mit

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|\, \mathrm{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

die $\boldsymbol{W^{m,p}}$**-Norm**, bezüglich welcher $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist (siehe [*Alt, 2012*, Abschnitt 1.27]). Für $m = 0$ erhalten wir die Lebesgue-Räume $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ zurück und speziell für $p = 2$ lässt sich auf $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ mit

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \left\langle\, \mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt definieren, sodass $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum ist und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Weiter lässt sich auch wieder zeigen, dass $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv ist für $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$ (siehe [*Alt, 2012*, Beispiel 6.11 (3)]).

Im Gegensatz zu L^p-Funktionen lassen sich $W^{m,p}$-Funktionen im Allgemeinen nicht mehr durch C_0^∞-Funktionen auf Ω approximieren. Dagegen versteht man $W^{m,p}(\Omega)$ als Abschluss von $C^\infty(\overline{\Omega})$ bezüglich der $W^{m,p}$-Norm.

B.3.4 Satz (Approximation von $\boldsymbol{W^{m,p}}$-Funktionen durch glatte Funktionen)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $m \geq 0$. Dann ist $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der $W^{m,p}$-Norm. Ist ferner Ω beschränkt und mit Lipschitz-Rand, dann sind die Einschränkungen der Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf Ω dicht in $W^{m,p}(\Omega)$, also

$$\left\{u|_\Omega :\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right\} \quad \textit{ist dicht in} \quad W^{m,p}(\Omega)\,.$$

Beweis: Den Beweis zum ersten Teil liest man in [*Alt, 2012*, Satz 2.24] nach. Den zweiten Teil kann man in [*Alt, 2012*, Lemma A 6.7] nachlesen. Für die Definition des Lipschitz-Randes schlage man in [*Alt, 2012*, Abschnitt A 6.2] nach. □

Dem Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ gibt man ein eigenes Symbol und schreibt $W_0^{m,p}(\Omega)$. Für $p = 2$ verwendet man dann auch wieder die Notation $H_0^m(\Omega)$.

Wir gehen nun noch auf einige Relationen zwischen den verschiedenen Sobolev- und Hölder-Räumen ein. Zum einen lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen an m, p und der Dimension n Sobolev-Räume in andere Sobolev-Räume einbetten, unter anderem sogar kompakt.

B.3.5 Satz (Sobolev-Einbettungen)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ sowie $1 \leq p_1, p_2 < \infty$. Ist

$$m_1 - \frac{n}{p_1} \geq m_2 - \frac{n}{p_2} \qquad \textit{und} \qquad m_1 \geq m_2\,,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m_2,p_2}(\Omega)$$

stetig. Ist weiter

$$m_1 - \frac{n}{p_1} > m_2 - \frac{n}{p_2} \qquad \textit{und} \qquad m_1 > m_2\,,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m_1,p_1}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m_2,p_2}(\Omega)$$

sogar kompakt.

Beweis: Für einen Beweis siehe [*Alt, 2012*, Satz 8.9]. □

Auf der anderen Seite lassen sich Sobolev-Funktionen auch als hinreichend glatte Hölder-Funktionen auffassen.

B.3.6 Satz (Sobolev-Einbettungen in Hölder-Räume)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand,* $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$. *Ist*

$$m - \frac{n}{p} > k + \gamma \qquad \textit{mit} \quad 0 \le \gamma \le 1\,,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

kompakt, also insbesondere auch stetig. Ist

$$m - \frac{n}{p} = k + \gamma \qquad \textit{mit} \quad 0 < \gamma < 1\,,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

stetig.

Beweis: Für einen Beweis siehe [*Alt, 2012*, Satz 8.13]. Das entscheidende Werkzeug zum Beweisen der Sobolev-Ungleichungen ist die Morrey'sche Ungleichung ([*Alt, 2012*, Satz 8.11]). □

Für $W^{m,\infty}$-Funktionen erhält man folgende Charakterisierung.

B.3.7 Satz (Charakterisierung von $W^{m,\infty}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Für* $k \ge 0$ *ist eine Funktion* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *genau dann in* $C^{k,1}(\overline{\Omega})$, *wenn* $u \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$.

Beweis: Der Beweis lässt sich in [*Alt, 2012*, Satz 8.5 (2)] nachlesen. □

Zum Schluss des Unterkapitels erwähnen wir noch ein bekanntes Resultat der Variationsrechnung, welche oft zum Tragen kommt, wenn es darum geht, die Euler-Lagrange-Gleichung aus der ersten Variation eines entsprechenden Funktionals zu gewinnen.

B.3.8 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\;\mathrm{d}x \,=\, 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

erfüllt ist. Dann gilt $u = 0$ fast überall in Ω. Ist Ω zusammenhängend und erfüllt $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i\varphi(x)\;\mathrm{d}x \,=\, 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ und } i = 1, \ldots, n\,,$$

dann ist u fast überall eine konstante Funktion.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung wird in [*Alt, 2012*, Satz 2.21] bewiesen. Den zweiten Teil kann man in [*Alt, 2012*, Übung U 6.9] nachlesen. □

B.4. Grundbegriffe der Finite-Elemente-Methode

Zum Abschluss des Anhangs wollen wir noch einige Grundbegriffe zur *Finite-Elemente-Methode* zusammenfassen. Bei der **Finite-Elemente-Methode** (**FEM**) handelt es sich um ein weitverbreitetes numerisches Lösungsverfahren zur Approximation von Lösungen partieller Differentialgleichungen. Durch Unterteilung des Definitionsgebietes in endlich viele einfache Teilgebiete reduziert man das ursprünglich kontinuierliche Problem in ein diskretes Problem, welches sich numerisch lösen lässt.

Ein bekannter Ansatz, Lösungen einer partiellen Differentialgleichungen über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in einer Menge X von Funktionen zu finden, ist die Definition eines „ähnlichen“ Problems auf einem endlich-dimensionalen Teilraum X_h von X, welches auch **diskretes Problem** genannt wird. Dieser Ansatz wird auch als **Galerkin-Methode** bezeichnet.

Nach [*Ciarlet, 2002*, Chapter 2] ist die Finite-Elemente-Methode in ihrer einfachsten Form eine Galerkin-Methode, welche durch drei grundlegende Aspekte zur Konstruktion von X_h, dem **Finite-Elemente-Raum**, charakterisiert ist:

(i) eine *Triangulierung* $\mathfrak{T}_h$ von Ω, sodass sich Ω als disjunkte Vereinigung *finiter Elemente* aus $\mathfrak{T}_h$ schreiben lässt,

(ii) Funktionen $u_h \in X_h$, welche stückweise polynomial sind, das heißt, für jedes $K \in \mathfrak{T}_h$ ist $u_h|_K$ ein Polynom,

(iii) eine Basis von X_h, deren Funktionen einen „hinreichend kleinen“ Träger besitzen.

Als **Triangulierung** oder **Zerlegung** $\mathfrak{T}_h$ von Ω versteht man eine Unterteilung von $\overline{\Omega}$ in eine endliche Zahl von Teilmengen K, sodass $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathfrak{T}_h} K$. Dabei sollen die verschiedenen Teile K paarweise disjunktes und nichtleeres Inneres haben, sodass jede Facette eines Teils mit einer Facette eines anderen Teils übereinstimmt.

Als **finites Element** (siehe [*Ciarlet, 2002*, Section 2.3]) bezeichnet man dann ein Tripel (K, P, Σ) bestehend aus einem Teil $K \in \mathfrak{T}_h$ der Triangulierung, einem Raum P von Polynomen über K und einer endlichen Menge Σ von linear unabhängigen linearen Funktionalen φ_i, $1 \leq i \leq N$, über P, den **Knotenvariablen** oder **Freiheitsgraden** des finiten Elements. Wenn P und Σ dem Kontext zu entnehmen sind, nennt man oftmals auch einfach K das finite Element.

Eine wichtige Eigenschaft finiter Elemente, bzw. spezieller der Freiheitsgrade Σ eines finiten Elements, ist die der P-*Unisolvenz*. Dabei nennt man Σ ***P*-unisolvent**, falls die Angabe von N Werten α_i ein eindeutiges Polynom $p \in P$ bestimmt, welches $\varphi_i(p) = \alpha_i$ für alle i erfüllt, wobei φ_i die N verschiedenen Freiheitsgrade von Σ sind. In diesem Sinne definieren die Freiheitsgrade unisolventer Elemente eine zu einer Basis p_i von P duale Basis mit $\varphi_j(p_i) = \delta_{ij}$, sodass jedes $p \in P$ die Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(p)\, p_i$$

besitzt, was $\dim P = N$ zeigt.

Für die Konstruktion des Finite-Elemente-Raumes gibt es verschiedene Ansätze. Gemeinsam haben alle Ansätze, dass die Funktionen $u \in X_h$, eingeschränkt auf ein finites Element K, insbesondere im Polynomraum $u|_K \in P$ liegen. In ihrer einfachsten Form, der „konformen“ Finite-Elemente-Methode, sind gewissen Stetigkeitsbedingungen an die Elemente von X_h gegeben. Sind die Elemente $u \in X_h$ beispielsweise C^k-stetig auf Ω, sodass $X_h \subset C^k(\overline{\Omega})$, so bezeichnet man die Gesamtheit aller finiten Elemente und dem Finite-Elemente-Raum auch als **C^k-Elemente**. In diesem Fall lässt sich der Finite-Elemente-Raum meist als Teilraum des Funktionenraumes X des kontinuierlichen Problems auffassen.

In allgemeineren Ansätze, wie beispielsweise der „nichtkonformen“ finiten Elemente, können die Stetigskeitsanforderungen der Funktionen in X_h auch fallen gelassen werden, zwecks besserer Implementierbarkeit. In solchen Fällen wird X_h oftmals kein Teilraum von X mehr sein.

Literaturverzeichnis

Bücher und Monographien

[*Alt, 2012*] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 6. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[*Blaschke, 1929*] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*, Springer Berlin, 1929.

[*Bleecker, 1981*] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing, 1981.

[*Chavel, 2006*] I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, 2. Auflage, Cambridge University Press, 2006.

[*Ciarlet, 2002*] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, 2. Auflage, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[*Dacorogna, 2009*] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, 2. Auflage, Imperial College Press, 2009.

[*Evans, 1998*] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[*Gazzola, Grunau und Sweers, 2010*] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[*Giaquinta und Hildebrandt, 1996*] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[*Gilbarg und Trudinger, 2001*] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[*Isham, 1999*] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific Publishing, 1999.

[*Jost, 2005*] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2005.

[*Jost und Li-Jost, 1998*] J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, 1998.

[*Kobayashi und Nomizu, 1963*] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*, Wiley New York London, 1963.

[*Kurdila und Zabarankin, 2005*] A. J. Kurdila, M. Zabarankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser Verlag Basel, 2005.

[*Lee, 1997*] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag New York, 1997.

[*Lee, 2013*] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2. Auflage, Springer-Verlag New York, 2013.

[*Oprea, 2000*] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, American Mathematical Society, 2000.

[*Waldmann, 2007*] S. Waldmann, *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[*Weidmann, 1980*] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag New York, 1980.

[*Willmore, 1993*] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, 1993.

Wissenschaftliche Artikel

[Baker, 2010] C. Baker, *The mean curvature flow of submanifolds of high codimension*, Dissertation, Australian National University, 2010.

[Bryant und Griffiths, 1986] R. Bryant, P. Griffiths, *Reduction for Constrained Variational Problems and* $\int \frac{\kappa^2}{2}\,\mathrm{d}s$, American Journal of Mathematics **108**, 525 - 570, 1986.

[Canham, 1970] P. B. Canham,, *The Minimum Energy of Bending as a Possible Explanation of the Biconcave Shape of the Human Red Blood Cell*, Journal of Theoretical Biology **26**, 61 - 81, 1970.

[Chen, 1974] B. Y. Chen, *Some Conformal Invariants of Submanifolds and Their Applications*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana **10**, 380 - 385, 1974.

[Dall'Acqua, Deckelnick und Grunau, 2008] A. Dall'Acqua, K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau, *Classical solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution*, Advances in Calculus of Variations **1**, 379 - 397, 2008.

[Dall'Acqua et al., 2011] A. Dall'Acqua, S. Fröhlich, H.-Ch. Grunau, F. Schieweck, *Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data*, Advances in Calculus of Variations **4**, 1 - 81, 2011.

[Deckelnick und Schieweck, 2010] K. Deckelnick, F. Schieweck, *Error analysis for the approximation of axisymmetric Willmore flow by C^1-finite elements*, Interfaces and Free Boundaries **12**, 551 - 574, 2010.

[Deuling und Helfrich, 1976] H. J. Deuling, W. Helfrich, *Red Blood Cell Shapes as explained on the Basis of Curvature Elasticity*, Biophysical Journal **16**, 861 - 868, 1976.

[Eichmann, 2016] S. Eichmann *Nonuniqueness for Willmore surfaces of revolution satisfying Dirichlet boundary data*, The Journal of Geometric Analysis **26**, 2563 - 2590, 2016.

[Eichmann und Grunau, 2017] S. Eichmann, H.-Ch. Grunau *Existence for Willmore surfaces of revolution satisfying non-symmetric Dirichlet boundary conditions*, wird erscheinen in Advances in Calculus of Variations, 2017.

[Eichmann und Koeller, 2017] S. Eichmann, A. Koeller *Symmetry for Willmore Surfaces of Revolution*, The Journal of Geometric Analysis **27**, 618 - 642, 2017.

[Evans, 1974] E. A. Evans, *Bending Resistance and Chemically Induced Moments in Membrane Bilayers*, Biophysical Journal **14**, 923 - 931, 1974.

[Helfrich, 1973] W. Helfrich, *Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and possible Experiments*, Zeitschrift für Naturforschung C **28**, 693 - 703, 1973.

[Hertrich-Jeromin und Pinkall, 1992] U. Hertrich-Jeromin, U. Pinkall *Ein Beweis der Willmoreschen Vermutung für Kanaltori*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **430**, 21 - 34, 1992.

[Langer und Singer, 1984 (1)] J. C. Langer, D. A.Singer, *The Total Squared Curvature of Closed Curves*, Journal of Differential Geometry **20**, 1 - 22, 1984.

[Langer und Singer, 1984 (2)] J. C. Langer, D. A. Singer, *Curves in the Hyperbolic Plane and mean curvature of Tori in 3-Space*, Bulletin of the London Mathematical Society **16**, 531 - 534, 1984.

[Lawson, 1970] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$, Annals of Mathematics **92**, 335 - 374, 1970.

[Nitsche, 1993] J. C. C. Nitsche, *Boundary Value Problems for Variational Integrals involving Surface Curvatures*, Quarterly of Applied Mathematics **51**, 363 - 387, 1993.

[Ou-Yang, 2001] Z. Ou-Yang, *Elasticity theory of biomembranes*, Thin Solid Films **393**, 19 - 23, 2001.

[Persson, 2003] J. Persson, *Willmore Surfaces*, Master Arbeit, Lund University, 2003.

[Poisson, 1812] S. D. Poisson, *Mémoire sur les surfaces élastiques*, Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de L'Institut National de France, 167 - 225, 1812.

[Schadow, 1922] W. Schadow, siehe Fußnote auf Seite 56 in [Thomson, 1923], 1922.

[Schätzle, 2010] R. Schätzle, *The Willmore boundary problem*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **37**, 275 - 302, 2010.

[Scholtes, 2009] S. Scholtes, *Elastische Katenoide*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 2009.

[Scholtes, 2011] S. Scholtes, *Elastic Catenoids*, Analysis **31**, 125 - 143, 2011.

[Simon, 1993] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Communications in Analysis and Geometry **1**, 281 - 326, 1993.

[Thomson, 1923] G. Thomson, *Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der konformen Flächentheorie*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **3**, 31 - 56, 1923.

[Weiner, 1978] J. L. Weiner, *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Indiana University Mathematics Journal **27**, 19 - 35, 1978.

[White, 1973] J. H. White, *A global invariant of conformal mappings in space*, Proceedings of the American Mathematical Society **38**, 193 - 243, 1973.

[Willmore, 1965] T. J. Willmore, *Note on Embedded surfaces*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, **11B**, 493 - 496, 1965.

Notationen und Symbolverzeichnis

Wir fassen hier einige Notationen und Symbole zusammen. Im Großen und Ganzen orientiert sich die Notation in der Arbeit an die Notationen in der Literatur.

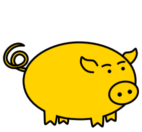
Die Norm eines normierten Vektorraumes X wird stets mit $\|\cdot\|_X$ bezeichnet. Im Index der in der Arbeit verwendeten Normen verzichten wir oftmals auf die Definitionsgebiete der verschiedenen Funktionenräume, sofern diese dem Kontext zu entnehmen sind. So meint $\|\cdot\|_{L^p}$ beispielsweise dann $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Für die Ableitung einer Kurve γ schreiben wir üblicherweise $\dot{\gamma}$. Die Ableitung einer reellwertigen Funktion u wird dagegen meist mit u' bezeichnet. In den Abschätzungen und Ungleichungen in Teil II taucht meist das Symbol C auf. Wir wollen dieses nicht als eine fest gewählte Konstante interpretieren, sondern stets als eine Konstante, welche sich von Zeile zu Zeile ändern kann. Dadurch ersparen wir uns den Schreibaufwand der Nummerierung aller möglichen auftretenden Konstanten.

Alle weiteren verwendeten Symbole und Notationen sind in der Auflistung unten zusammengefasst. Es sei darauf hingeweisen, dass die beiden Anhänge A und B auch den Zweck verfolgen, die Notationen der grundlegenden Begriffe festzulegen, sodass notfalls auf diese zu verweisen ist.

Symbol	**Beschreibung**	**Seite**
$\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$	Norm k-fach stetig differenzierbarer Funktionen über $\overline{\Omega}$	154
$\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$	Hölder-Norm k-fach stetig differenzierbarer Funktionen mit Hölder-Exponent γ auf $\overline{\Omega}$	154
$\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$	$= \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)}$, Sobolev-Norm für den Fall von Hilberträumen bei $p = 2$	157
$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$	Lebesgue-p-Norm	155
$\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$	Sobolev-p-Norm zum Differentiationsgrad m	157
$\rightharpoonup$	schwache Konvergenz	150
$\hookrightarrow$	stetige Einbettung eines Banachraumes in einen anderen Banachraum	151
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	kompakte Einbettung eines Banachraumes in einen anderen Banachraum	151
$\mathcal{A}(f)$	Flächenfunktional einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bzw. Rotationsfläche mit erster Fundamentalform bzw. Rotationsfläche	29, 48, 66
α	Randwerte für Dirichlet-Problem in den Kapiteln 4 bis 6	65
α_m	Randwert, sodass Goldschmidt-Kurven für Randwerte $\alpha < \alpha_m$ und Katenoide für $\alpha > \alpha_m$ absolute Minimierer des Flächenfunktionals sind	60
α_*	$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, Randwert, bei dem Gleichgewichtszylinder die eindeutigen Minimierer von $\mathcal{H}_\varepsilon$ in H_α zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sind	85

tr_g	durch die Metrik g induzierte Spur	138
u	Profilkurve einer Rotationsfläche, sofern diese sich als Graph schreiben lässt	34
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum zum Exponenten p und Differentiationsgrad m über Ω	156
$\mathcal{W}(f)$	Willmore-Funktional einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bzw. Rotationsfläche	23, 39, 66
$\mathcal{W}_c(f)$	konformes Willmore-Funktional einer Immersion $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bzw. Rotationsfläche	24,39
$\mathcal{W}_h(f)$	hyperbolisches Willmore-Funktional	47
X^*, X^{**}	Dual- und Bidualraum eines Banachraumes X	150
$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$	(Tangential-)Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$	137

Sachverzeichnis



Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Marco Doemeland, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie die Zitate deutlich kenntlich gemacht zu haben.

Magdeburg, den 9. Oktober 2017

Marco Doemeland