

Differentialgleichungen vierter Ordnung aus Mechanik und Differentialgeometrie – Klassische Modelle und aktuelle Herausforderungen –

Hans-Christoph Grunau

Otto-von-Guericke-Universität

Magdeburg

Darmstadt, 19.07.2006

Koautoren

- ▶ Guido Sweers (TU Delft)
- ▶ Filippo Gazzola, z.T. Marco Squassina (Politecnico di Milano)
- ▶ Klaus Deckelnick (Magdeburg)

Gleichungen vierter Ordnung

- ▶ (Naives) Maß für Verbiegungsenergie einer dünnen elastischen Platte unter orthogonaler Last f

$$\int_{\Omega} \left((\Delta u)^2 - f u \right) dx$$

→ Lineare Plattengleichung

Gleichungen vierter Ordnung

- ▶ (Naives) Maß für Verbiegungsenergie einer dünnen elastischen Platte unter orthogonaler Last f

$$\int_{\Omega} \left((\Delta u)^2 - f u \right) dx$$

→ Lineare Plattengleichung

- ▶ Differentialgeometrie: Suche nach konformen Metriken mit bestimmten Krümmungseigenschaften
Q-Krümmung → Paneitzgleichung

Gleichungen vierter Ordnung

- ▶ (Naives) Maß für Verbiegungsenergie einer dünnen elastischen Platte unter orthogonaler Last f

$$\int_{\Omega} \left((\Delta u)^2 - f u \right) dx$$

→ Lineare Plattengleichung

- ▶ Differentialgeometrie: Suche nach konformen Metriken mit bestimmten Krümmungseigenschaften
Q-Krümmung → Paneitzgleichung
- ▶ (Realistischeres) Maß für Verbiegungsenergie einer dünnen elastischen Platte

$$\int_{\text{graph } [u]} (H[u])^2 dS$$

→ Willmoregleichung

Lineare Plattengleichung

Gegeben $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung der

Differentialgleichung:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega.$$

Lineare Plattengleichung

Gegeben $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung der

Differentialgleichung:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega.$$

Randbedingungen:

Lineare Plattengleichung

Gegeben $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung der

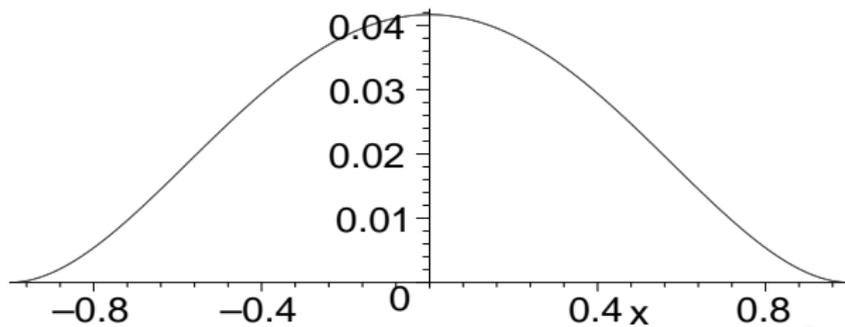
Differentialgleichung:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega.$$

Randbedingungen: Dirichlet. Eingespannte Platte.

$$u = |\nabla u| = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel: $f \equiv 1$.



Lineare Plattengleichung

Gegeben $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung der

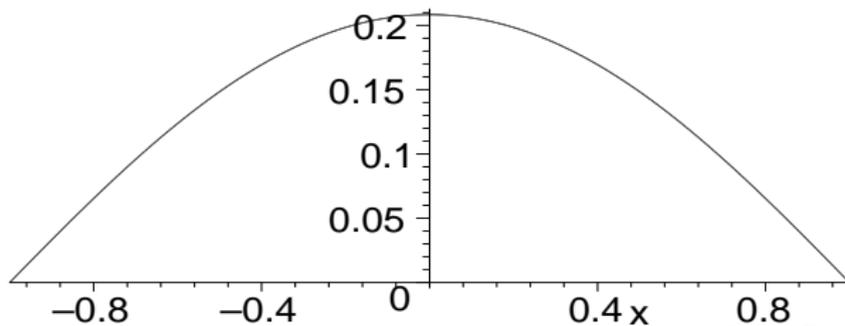
Differentialgleichung:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega.$$

Randbedingungen: Navier. „Gelenkig gelagerte“ Platte.

$$u = \Delta u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel: $f \equiv 1$



Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialungleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialungleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Und bei der Plattengleichung?

Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialungleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Und bei der Plattengleichung?

Wird die Platte überall noch oben ausgelenkt,
wenn man überall nach oben drückt?

Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialgleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Und bei der Plattengleichung?

Wird die Platte überall noch oben ausgelenkt,
wenn man überall nach oben drückt?

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0 \quad ???$$

Grundlegend für nichtlineare Probleme.

Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialungleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Und bei der Plattengleichung?

Wird die Platte überall noch oben ausgelenkt,
wenn man überall nach oben drückt?

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0 \quad ???$$

Grundlegend für nichtlineare Probleme.

Boggio – Hadamard – Duffin – Coffman – Osher – Kozlov –
Kondratiev – Maz'ya – Hedenmalm

Probleme: Positivitätserhaltung??

Ganz wesentliches Werkzeug bei harmonischen Funktionen,
allgemeiner elliptischen Differentialgleichungen:
Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Positivitätserhaltung.

Und bei der Plattengleichung?

Wird die Platte überall noch oben ausgelenkt,
wenn man überall nach oben drückt?

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0 \quad ???$$

Grundlegend für nichtlineare Probleme.

Boggio – Hadamard – Duffin – Coffman – Osher – Kozlov –
Kondratiev – Maz'ya – Hedenmalm

Bemerkung.

Lineare Existenz- und Regularitätstheorie: seit 1959 o.k.

Agmon – Douglis – Nirenberg

Konform kovarianter Differentialoperator vierter Ordnung

(\mathcal{M}, g) n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 5$).

Konform kovarianter Differentialoperator vierter Ordnung

(\mathcal{M}, g) n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 5$).

Konforme Kovarianz: für $g_u := u^{\frac{4}{n-4}} g$ gilt

$$(P_4^n)_u(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} (P_4^n)(u\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$$

Konform kovarianter Differentialoperator vierter Ordnung

(\mathcal{M}, g) n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 5$).

Konforme Kovarianz: für $g_u := u^{\frac{4}{n-4}} g$ gilt

$$(P_4^n)_u(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} (P_4^n)(u\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$$

wobei

$$P_4^n := \Delta^2 + \sum_{i,j=1}^n \nabla_i (a_n R \delta_{ij} - b_n R_{ij}) \nabla_j + \frac{n-4}{2} Q_4^n$$

und

$$Q_4^n := -c_n |(R_{ij})|^2 + d_n R^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta R.$$

Konform kovarianter Differentialoperator vierter Ordnung

(\mathcal{M}, g) n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 5$).

Konforme Kovarianz: für $g_u := u^{\frac{4}{n-4}} g$ gilt

$$(P_4^n)_u(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} (P_4^n)(u\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$$

wobei

$$P_4^n := \Delta^2 + \sum_{i,j=1}^n \nabla_i (a_n R \delta_{ij} - b_n R_{ij}) \nabla_j + \frac{n-4}{2} Q_4^n$$

und

$$Q_4^n := -c_n |(R_{ij})|^2 + d_n R^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta R.$$

Paneitz-Gleichung: $P_4^n u = \frac{n-4}{2} Q u^{\frac{n+4}{n-4}}.$

Q-Krümmung

Sei die Mannigfaltigkeit nun **vier**dimensional.

Gauß-Bonnet-Formel:

$$\int_{\mathcal{M}} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dS = 4\pi^2 \chi(\mathcal{M}).$$

Q-Krümmung

Sei die Mannigfaltigkeit nun **vier**dimensional.

Gauß–Bonnet–Formel:

$$\int_{\mathcal{M}} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dS = 4\pi^2 \chi(\mathcal{M}).$$

Da $\chi(\mathcal{M})$ topologische und $|W|^2 dS$ punktweise konforme Invariante:

$$\int_{\mathcal{M}} Q dS \quad \text{konforme Invariante.}$$

Steuert z.B. Existenz konformer Ricci-positiver Metriken.

Q-Krümmung

Sei die Mannigfaltigkeit nun **vier**dimensional.

Gauß-Bonnet-Formel:

$$\int_{\mathcal{M}} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dS = 4\pi^2 \chi(\mathcal{M}).$$

Da $\chi(\mathcal{M})$ topologische und $|W|^2 dS$ punktweise konforme Invariante:

$$\int_{\mathcal{M}} Q dS \quad \text{konforme Invariante.}$$

Steuert z.B. Existenz konformer Ricci-positiver Metriken.

Fragestellungen:

Existenz konformer Metriken mit konstanter Q-Krümmung.

Q-Krümmung

Sei die Mannigfaltigkeit nun **vier**dimensional.

Gauß-Bonnet-Formel:

$$\int_{\mathcal{M}} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dS = 4\pi^2 \chi(\mathcal{M}).$$

Da $\chi(\mathcal{M})$ topologische und $|W|^2 dS$ punktweise konforme Invariante:

$$\int_{\mathcal{M}} Q dS \quad \text{konforme Invariante.}$$

Steuert z.B. Existenz konformer Ricci-positiver Metriken.

Fragestellungen:

Existenz konformer Metriken mit konstanter Q -Krümmung.

Existenz konformer Metriken vorgeschriebener Q -Krümmung.

Q-Krümmung

Sei die Mannigfaltigkeit nun **vier**dimensional.

Gauß–Bonnet–Formel:

$$\int_{\mathcal{M}} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dS = 4\pi^2 \chi(\mathcal{M}).$$

Da $\chi(\mathcal{M})$ topologische und $|W|^2 dS$ punktweise konforme Invariante:

$$\int_{\mathcal{M}} Q dS \quad \text{konforme Invariante.}$$

Steuert z.B. Existenz konformer Ricci-positiver Metriken.

Chang – Yang – Wang – Gursky – Brendle – Hebey – Djadli –
 Druet – Ledoux – Struwe – Malchiodi

Willmoregleichung

Zweidimensional

$$\Delta_{\mathcal{M}}H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{auf } \mathcal{M}.$$

Quasilinear; von vierter Ordnung; elliptisch, nicht gleichmäßig.

Willmoregleichung

Zweidimensional

$$\Delta_{\mathcal{M}}H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{auf } \mathcal{M}.$$

Quasilinear; von vierter Ordnung; elliptisch, nicht gleichmäßig.

Bisherige Resultate:

Existenz geschlossener Willmore-Flächen vorgeschriebenen Geschlechts.

Willmoregleichung

Zweidimensional

$$\Delta_{\mathcal{M}}H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{auf } \mathcal{M}.$$

Quasilinear; von vierter Ordnung; elliptisch, nicht gleichmäßig.

Bisherige Resultate:

Existenz geschlossener Willmore-Flächen vorgeschriebenen Geschlechts.

Stabilität der Kugel unter dem Willmorefluss.

Willmoregleichung

Zweidimensional

$$\Delta_{\mathcal{M}}H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{auf } \mathcal{M}.$$

Quasilinear; von vierter Ordnung; elliptisch, nicht gleichmäßig.

Bisherige Resultate:

Existenz geschlossener Willmore-Flächen vorgeschriebenen Geschlechts.

Stabilität der Kugel unter dem Willmorefluss.

Randwertprobleme???

Eindimensional, im Folgenden:

Gesucht $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Lösung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

Eindimensional, im Folgenden:

Gesucht $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Lösung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei κ Krümmung des gesuchten Graphen von u :

$$\kappa(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

Eindimensional, im Folgenden:

Gesucht $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Lösung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei κ Krümmung des gesuchten Graphen von u :

$$\kappa(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

Randwertprobleme:

Eindimensional, im Folgenden:

Gesucht $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Lösung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei κ Krümmung des gesuchten Graphen von u :

$$\kappa(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

Randwertprobleme: Navier.

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha_0, \quad \kappa(1) = -\alpha_1.$$

Eindimensional, im Folgenden:

Gesucht $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Lösung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei κ Krümmung des gesuchten Graphen von u :

$$\kappa(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

Randwertprobleme: Dirichlet.

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = \beta_0, \quad u'(1) = -\beta_1,$$

Vergleichsprinzipien?

Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = |\nabla u| = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Frage: $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$?

Boggio–Hadamard–Vermutung.

Vergleichsprinzipien?

Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = |\nabla u| = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Frage: $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$?

Boggio–Hadamard–Vermutung.

Äquivalent: Positivität der Greenschen Funktion

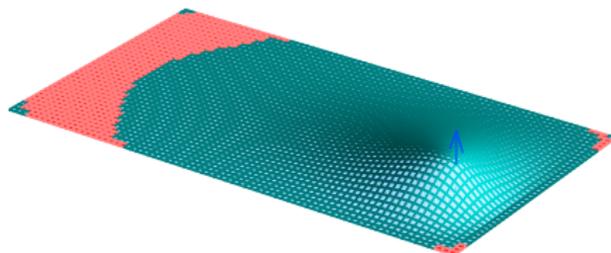
Boggio, 1905, (Einheits-) Kugel $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

$$G_{B, \Delta^2}(x, y) = c_n |x - y|^{4-n} \int_1^{\sqrt{1 + \frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}}} (v^2 - 1)v^{1-n} dv > 0.$$

Allgemeine Gebiete?

Allgemeine Gebiete?

Zahlreiche Gegenbeispiele, 1949 ... 2000



Numerische Approximation:
Lokal wirkende positive Kraft (Pfeil).
Rot: $\{x : u(x) < 0\}$.

Störungstheorie von Positivität

Präzise Abschätzungen für Boggios Greensche Funktion:

$$G_{B, \Delta^2}(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right\}, & \text{falls } n > 4; \\ \log \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right), & \text{falls } n = 4; \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\}, & \text{falls } n < 4. \end{cases}$$

Störungstheorie von Positivität

Präzise Abschätzungen für Boggios Greensche Funktion:

$$G_{B, \Delta^2}(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right\}, & \text{falls } n > 4; \\ \log \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right), & \text{falls } n = 4; \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\}, & \text{falls } n < 4. \end{cases}$$

Daraus Positivitätserhaltung bei:
 Störungen höchster Ordnung in $n = 2$;

Störungstheorie von Positivität

Präzise Abschätzungen für Boggios Greensche Funktion:

$$G_{B, \Delta^2}(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right\}, & \text{falls } n > 4; \\ \log \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right), & \text{falls } n = 4; \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\}, & \text{falls } n < 4. \end{cases}$$

Daraus Positivitätserhaltung bei:

Störungen höchster Ordnung in $n = 2$;

Störungen niederer Ordnung in $n \geq 3$.

Projekt:

Negativteil „klein“ relativ zum singulären Positivteil??

Projekt:

Negativteil „klein“ relativ zum singulären Positivteil??

Erster Schritt (für $n = 2, 3$, s. Nehari):

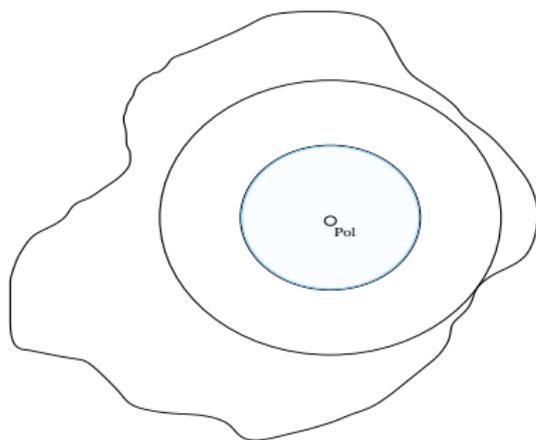


Abbildung: Singularität ist positiv ($n \geq 3$)

Projekt:

Negativteil „klein“ relativ zum singulären Positivteil??

Theorem

Für $n \geq 4$ gilt mit Konstanten $\delta_n > 0$:

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ glatt, beschränkt, $G_\Omega := G_{\Delta^2, \Omega}$ die Greensche Funktion zur eingespannten Platte, so:

$$|x - y| < \delta_n \max\{d(x), d(y)\} \Rightarrow G_\Omega(x, y) > 0.$$

Für δ_n kann man erreichen, dass

$$\delta_4 \geq 0.59, \quad \delta_n \geq 0.6 \text{ für } n \geq 5,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Positivität bei optimalen Lösungen

Typische Frage: Ist die erste Eigenfunktion

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{in } B, \\ \varphi_1 = |\nabla \varphi_1| = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

von festem Vorzeichen, etwa **positiv?**,
der erste Eigenwert λ_1 also **einfach?**

Positivität bei optimalen Lösungen

Typische Frage: Ist die erste Eigenfunktion

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{in } B, \\ \varphi_1 = |\nabla \varphi_1| = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

von festem Vorzeichen, etwa **positiv?**,
 der erste Eigenwert λ_1 also **einfach?**

Variationsprinzip

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^2(B) \setminus \{0\}} \frac{\int_B (\Delta v)^2 dx}{\int_B v^2 dx}$$

Positivität bei optimalen Lösungen

Typische Frage: Ist die erste Eigenfunktion

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{in } B, \\ \varphi_1 = |\nabla \varphi_1| = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

von festem Vorzeichen, etwa **positiv?**,
 der erste Eigenwert λ_1 also **einfach?**

Variationsprinzip

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^2(B) \setminus \{0\}} \frac{\int_B (\Delta v)^2 dx}{\int_B v^2 dx}$$

Problem:

$$v \in H_0^2(B) \not\Rightarrow |v| \in H_0^2(B)!$$

Ausweg?

Moreau-Zerlegung, abstrakt

Theorem

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, \mathcal{K} ein abgeschlossener konvexer Kegel;

$$\mathcal{K}^* := \{h \in \mathcal{H}; \forall g \in \mathcal{K} : (g, h) \leq 0\}$$

der dazu duale Kegel. Dann: $\forall f \in \mathcal{H}$ existiert genau ein Paar

$$f_1 \in \mathcal{K}, \quad f_2 \in \mathcal{K}^*, \quad f = f_1 + f_2, \quad (f_1, f_2) = 0.$$

Moreau-Zerlegung, abstrakt

Theorem

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, \mathcal{K} ein abgeschlossener konvexer Kegel;

$$\mathcal{K}^* := \{h \in \mathcal{H}; \forall g \in \mathcal{K} : (g, h) \leq 0\}$$

der dazu duale Kegel. Dann: $\forall f \in \mathcal{H}$ existiert genau ein Paar

$$f_1 \in \mathcal{K}, \quad f_2 \in \mathcal{K}^*, \quad f = f_1 + f_2, \quad (f_1, f_2) = 0.$$

Beweis. Wie im Projektionssatz

$$\|f - f_1\|^2 = \min_{g \in \mathcal{K}} \|f - g\|^2.$$

Variationsprinzip, Parallelogrammgleichung. □

Moreau-Zerlegung in $H_0^2(B)$

Skalarprodukt: $(g, h) := \int_B \Delta g \Delta h \, dx$

Kegel: $\mathcal{K} := \{g \in \mathcal{H} : g \geq 0\}$

Moreau-Zerlegung in $H_0^2(B)$

Skalarprodukt: $(g, h) := \int_B \Delta g \Delta h \, dx$

Kegel: $\mathcal{K} := \{g \in \mathcal{H} : g \geq 0\}$

Was bedeutet $h \in \mathcal{K}^*$? Formal

$$\forall g \geq 0 : \int_B g \Delta^2 h \, dx \leq 0.$$

Gemäß Boggio: $h < 0$ oder $h \equiv 0$.

Moreau-Zerlegung in $H_0^2(B)$

Skalarprodukt: $(g, h) := \int_B \Delta g \Delta h \, dx$

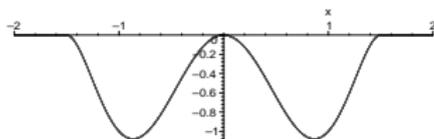
Kegel: $\mathcal{K} := \{g \in \mathcal{H} : g \geq 0\}$

Was bedeutet $h \in \mathcal{K}^*$? Formal

$$\forall g \geq 0 : \int_B g \Delta^2 h \, dx \leq 0.$$

Gemäß Boggio: $h < 0$ oder $h \equiv 0$.

Beispiel (T. Bräu):



Moreau-Zerlegung in $H_0^2(B)$

Skalarprodukt: $(g, h) := \int_B \Delta g \Delta h \, dx$

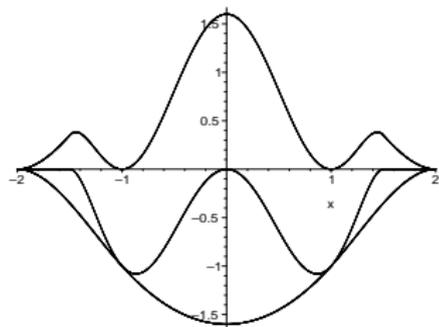
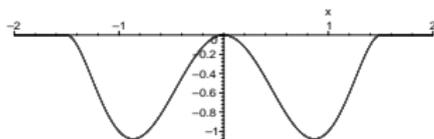
Kegel: $\mathcal{K} := \{g \in \mathcal{H} : g \geq 0\}$

Was bedeutet $h \in \mathcal{K}^*$? Formal

$$\forall g \geq 0 : \int_B g \Delta^2 h \, dx \leq 0.$$

Gemäß Boggio: $h < 0$ oder $h \equiv 0$.

Beispiel (T. Bräu):



Eigenwertproblem für die eingespannte Platte

Lemma

Sei φ Eigenfunktion zum ersten Eigenwert λ_1 der eingespannten Platte über B :

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^2(B)} \frac{\int_B (\Delta v)^2 dx}{\int_B v^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta \varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx}.$$

Dann hat φ festes Vorzeichen, etwa $\varphi > 0$. Folglich ist λ_1 einfach.

Eigenwertproblem für die eingespannte Platte

Lemma

Sei φ Eigenfunktion zum ersten Eigenwert λ_1 der eingespannten Platte über B :

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^2(B)} \frac{\int_B (\Delta v)^2 dx}{\int_B v^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta \varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx}.$$

Dann hat φ festes Vorzeichen, etwa $\varphi > 0$. Folglich ist λ_1 einfach.

Beweis. Annahme, φ wechselt Vorzeichen.

Moreau-Zerlegung: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$\int_B \Delta \varphi_1 \Delta \varphi_2 dx = 0, \quad 0 \not\equiv \varphi_1 \geq 0, \quad \varphi_2 < 0.$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

und

$$\lambda_1 = \frac{\int_B (\Delta\varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1 + \varphi_2)^2 dx}$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\int_B (\Delta\varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1 + \varphi_2)^2 dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx + 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \end{aligned}$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\int_B (\Delta\varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1 + \varphi_2)^2 dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx + 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx - 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \end{aligned}$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\int_B (\Delta\varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1 + \varphi_2)^2 dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx + 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx - 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \\ &> \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} = \frac{\int_B (\Delta\tilde{\varphi})^2 dx}{\int_B \tilde{\varphi}^2 dx}, \end{aligned}$$

Nun ist auch

$$\tilde{\varphi} := \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^2(B)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\int_B (\Delta\varphi)^2 dx}{\int_B \varphi^2 dx} = \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1 + \varphi_2)^2 dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx + 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \\ &= \frac{\int_B (\Delta\varphi_1)^2 dx - 2 \int_B \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_2 dx + \int_B (\Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} \\ &> \frac{\int_B (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)^2 dx}{\int_B (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) dx} = \frac{\int_B (\Delta\tilde{\varphi})^2 dx}{\int_B \tilde{\varphi}^2 dx}, \end{aligned}$$

ein Widerspruch!



Euklidische Hintergrundmetrik

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$. Gesucht $u > 0$:

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \Omega$$

plus geeignete Randbedingungen. Dann:

Euklidische Hintergrundmetrik

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$. Gesucht $u > 0$:

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \Omega$$

plus geeignete Randbedingungen. Dann:

Konforme Metrik $g_u = u^{4/(n-4)} (\delta_{ij})$ konstante Q -Krümmung.

Euklidische Hintergrundmetrik

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$. Gesucht $u > 0$:

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \Omega$$

plus geeignete Randbedingungen. Dann:

Konforme Metrik $g_u = u^{4/(n-4)} (\delta_{ij})$ konstante Q -Krümmung.

Variationsmethoden: **kritisches** Wachstum.

\Rightarrow partieller **Kompaktheitsverlust** der Funktionale.

Euklidische Hintergrundmetrik

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$. Gesucht $u > 0$:

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \Omega$$

plus geeignete Randbedingungen. Dann:

Konforme Metrik $g_u = u^{4/(n-4)} (\delta_{ij})$ konstante Q -Krümmung.

Variationsmethoden: **kritisches** Wachstum.

\Rightarrow partieller **Kompaktheitsverlust** der Funktionale.

Grundlegend: Sobolev–Einbettung mit optimaler Konstante,

$$\mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2n/(n-4)}(\mathbb{R}^n); \quad S := \inf \frac{\|\Delta u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2n/(n-4)}}^2}.$$

Euklidische Hintergrundmetrik

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$. Gesucht $u > 0$:

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \Omega$$

plus geeignete Randbedingungen. Dann:

Konforme Metrik $g_u = u^{4/(n-4)} (\delta_{ij})$ konstante Q -Krümmung.

Variationsmethoden: **kritisches** Wachstum.

\Rightarrow partieller **Kompaktheitsverlust** der Funktionale.

Grundlegend: Sobolev–Einbettung mit optimaler Konstante,

$$\mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2n/(n-4)}(\mathbb{R}^n); \quad S := \inf \frac{\|\Delta u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2n/(n-4)}}^2}.$$

Minima werden angenommen, sind die positiven Lösungen von

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \mathbb{R}^n \quad (\text{NLGR})$$

Energieverdoppelung vorzeichenwechselnder Lösungen

Lemma

Sei $u \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n)$ eine vorzeichenwechselnde Lösung von

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \mathbb{R}^n. \quad (\text{NLGR})$$

Dann gilt:

$$\frac{\|\Delta u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2n/(n-4)}}^2} \geq 2^{4/n} S.$$

Energieverdoppelung vorzeichenwechselnder Lösungen

Lemma

Sei $u \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n)$ eine vorzeichenwechselnde Lösung von

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \mathbb{R}^n. \quad (\text{NLGR})$$

Dann gilt:

$$\frac{\|\Delta u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2n/(n-4)}}^2} \geq 2^{4/n} S.$$

Beweis. Ähnlich wie beim linearen Eigenwertproblem.

Energieverdoppelung vorzeichenwechselnder Lösungen

Lemma

Sei $u \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n)$ eine vorzeichenwechselnde Lösung von

$$\Delta^2 u = |u|^{8/(n-4)} u \text{ in } \mathbb{R}^n. \quad (\text{NLGR})$$

Dann gilt:

$$\frac{\|\Delta u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2n/(n-4)}}^2} \geq 2^{4/n} S.$$

Beweis. Ähnlich wie beim linearen Eigenwertproblem.

Damit: Positive konforme Faktoren mit nichttrivialer konstanter Q -Krümmung.

Navier-Randwertproblem

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

Navier-Randwerte:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha, \quad \kappa(1) = -\alpha.$$

Navier-Randwertproblem

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$

Navier-Randwerte:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha, \quad \kappa(1) = -\alpha.$$

Beobachtung, vgl. auch Euler:

$$v(x) := \kappa(x) (1 + u'(x)^2)^{1/4}$$

löst DGL zweiter Ordnung ohne Term nullter Ordnung:

$$- (a(x)v'(x))' + b(x)v'(x) = 0.$$

Symmetrische Lösungen

Dann ist $\kappa(x) (1 + u'(x)^2)^{1/4} \equiv -c$.

Symmetrische Lösungen

Dann ist $\kappa(x) (1 + u'(x)^2)^{1/4} \equiv -c$. Explizite Auflösung, dazu

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right), \quad G(s) := \int_0^s \frac{1}{(1 + \tau^2)^{5/4}} d\tau$$

Umkehrfunktion $G^{-1} : \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$.

Symmetrische Lösungen

Dann ist $\kappa(x) (1 + u'(x)^2)^{1/4} \equiv -c$. Explizite Auflösung, dazu

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right), \quad G(s) := \int_0^s \frac{1}{(1 + \tau^2)^{5/4}} d\tau$$

Umkehrfunktion $G^{-1} : \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$.

Für glatte symmetrische Lösungen gibt es ein $c \in (-c_0, c_0)$:

$$\forall x \in [0, 1] : \quad u'(x) = G^{-1} \left(\frac{c}{2} - cx \right).$$

$$\kappa(x) = -\frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1} \left(\frac{c}{2} - cx \right)^2}}.$$

Mit $u(0) = u(1) = 0$, entsprechende Formel für u .

Realisierung der Randwertvorgabe

Zu lösen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} -\kappa_c(0) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1} \left(\frac{c}{2}\right)^2}} =: h(c).$$

Bild von h = Menge der zulässigen Randdaten für α .

Realisierung der Randwertvorgabe

Zu lösen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} -\kappa_c(0) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} =: h(c).$$

Bild von h = Menge der zulässigen Randdaten für α .
 Kurvendiskussion

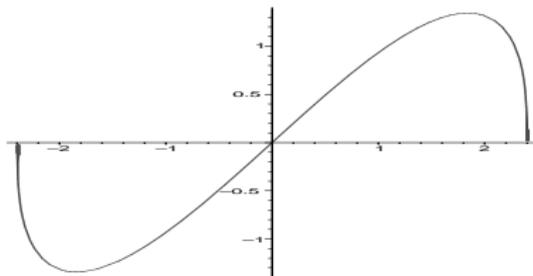


Abbildung: Zulässige Randdaten α , abhängig vom Parameter c

Realisierung der Randwertvorgabe

Zu lösen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} -\kappa_c(0) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} =: h(c).$$

Bild von h = Menge der zulässigen Randdaten für α .

Theorem

Es gibt $\alpha_{\max} = 1.343799725 \dots$ so dass für $0 < |\alpha| < \alpha_{\max}$ das Navier-Randwertproblem genau zwei Lösungen unter den glatten symmetrischen Graphen hat.

Für $|\alpha| = \alpha_{\max}$: genau eine solche Lösung.

Für $\alpha = 0$ nur triviale Lösung.

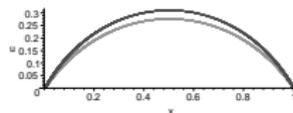
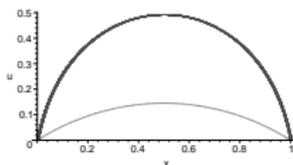
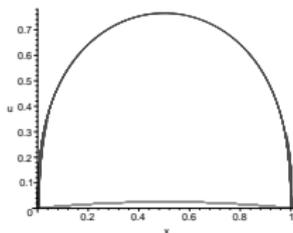
Für $|\alpha| > \alpha_{\max}$: keine solche Lösung.

Realisierung der Randwertvorgabe

Zu lösen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} -\kappa_c(0) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} =: h(c).$$

Bild von h = Menge der zulässigen Randdaten für α .



Realisierung der Randwertvorgabe

Zu lösen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} -\kappa_c(0) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} =: h(c).$$

Bild von $h =$ Menge der zulässigen Randdaten für α .

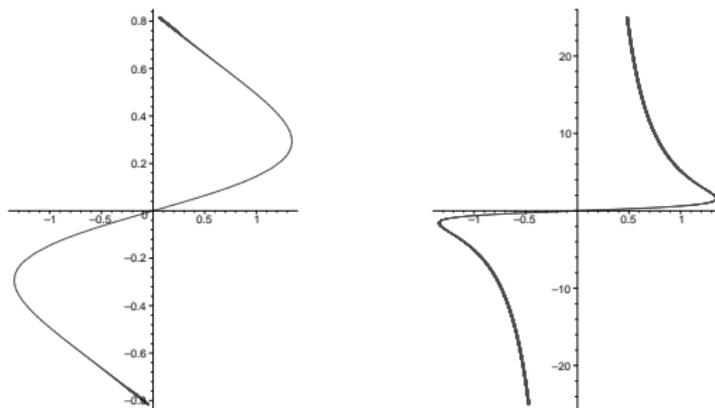


Abbildung: Verzweigungsdiagramme für das Navierproblem

Navier-Randwertproblem

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$

Navier-Randwerte:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha_1, \quad \kappa(1) = -\alpha_2.$$

Navier-Randwertproblem

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

Navier-Randwerte:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha_1, \quad \kappa(1) = -\alpha_2.$$

Idee: Auf symmetrischen Fall zurückführen!

Navier-Randwertproblem

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$

Navier-Randwerte:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha_1, \quad \kappa(1) = -\alpha_2.$$

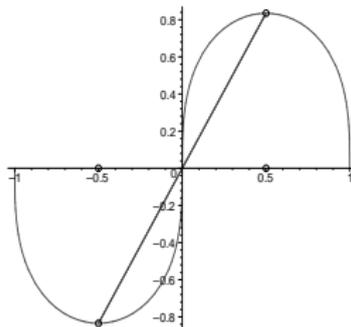
Idee: Auf symmetrischen Fall zurückführen!
 Große Lösung U_0 mit $\alpha = 0$ nehmen,
 ungerade fortsetzen,
 Ausschnitte betrachten, drehen, reskalieren.

Konstruktion unsymmetrischer Lösungen

κ_0 Krümmungsfunktion von U_0 ,
wähle Teilungspunkte $-1 < x_0 < x_1 < 1$

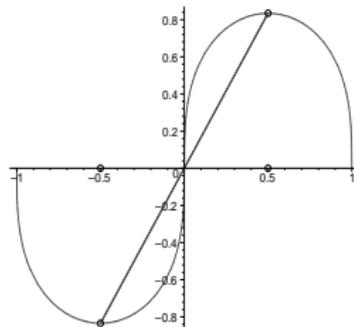
Konstruktion unsymmetrischer Lösungen

κ_0 Krümmungsfunktion von U_0 ,
wähle Teilungspunkte $-1 < x_0 < x_1 < 1$



Konstruktion unsymmetrischer Lösungen

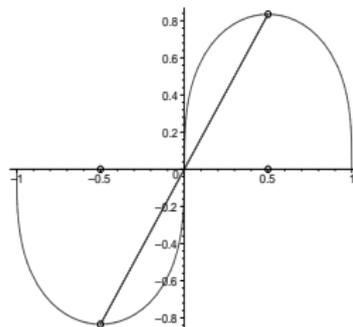
κ_0 Krümmungsfunktion von U_0 ,
 wähle Teilungspunkte $-1 < x_0 < x_1 < 1$



Betrachte U_0 als Graph (zu prüfen!!)
 über der Strecke durch $(x_0, U_0(x_0))$ und $x_1, U_0(x_1)$.

Konstruktion unsymmetrischer Lösungen

κ_0 Krümmungsfunktion von U_0 ,
 wähle Teilungspunkte $-1 < x_0 < x_1 < 1$

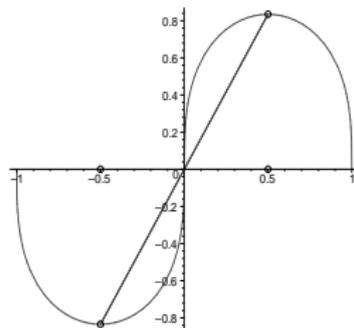


Länge der Verbindungsstrecke:

$$L(x_0, x_1) := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (U_0(x_1) - U_0(x_0))^2},$$

Konstruktion unsymmetrischer Lösungen

κ_0 Krümmungsfunktion von U_0 ,
 wähle Teilungspunkte $-1 < x_0 < x_1 < 1$

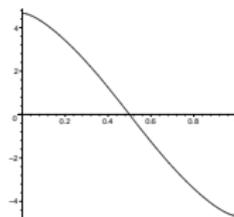
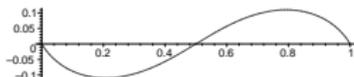


Nach Drehung und Reskalierung auf $[0, 1]$ realisierte
 Randkrümmungen:

$$L(x_0, x_1)\kappa_0(x_0), \quad L(x_0, x_1)\kappa_0(x_1).$$

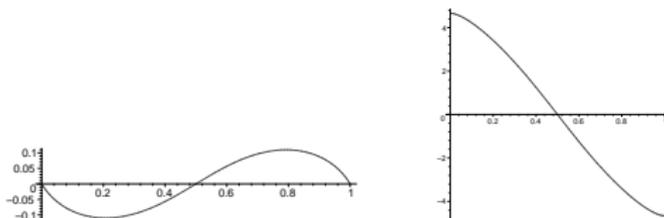
Beispiele

Teilungspunkte $x_0 = -1/2, x_0 = 1/2$:

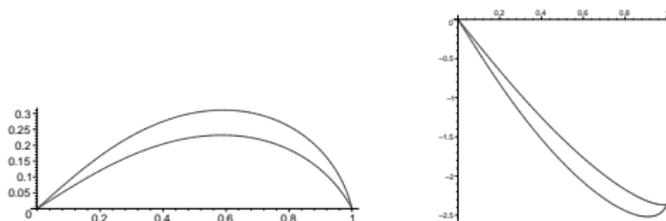


Beispiele

Teilungspunkte $x_0 = -1/2, x_1 = 1/2$:



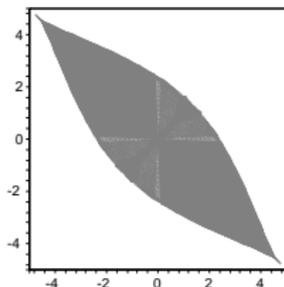
Teilungspunkte $x_0 = 0, x_1 = 0.7$ und $x_0 = 0, x_1 = 0.53 \dots$:



Existenzsatz

Theorem

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$:



Dann existiert für jedes $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{C}$ eine glatte Graphen-Lösung des Navier-Randwertproblems:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, & \kappa(0) = -\alpha_0, & \kappa(1) = -\alpha_1. \end{cases}$$

Projekte

- ▶ Analysis und Numerik (K. Deckelnick) für Willmoreflächen, zunächst rotationssymmetrisch.
- ▶ Schon einige unerwartet Existenz- und Verzweigungs-“Resultate”.

Projekte

- ▶ Analysis und Numerik (K. Deckelnick) für Willmoreflächen, zunächst rotationssymmetrisch.
- ▶ Schon einige unerwartet Existenz- und Verzweigungs-“Resultate”.
- ▶ Hat man in diesem Zusammenhang geordnete Familien von Lösungen?
- ▶ Positivitätserhaltung?

Projekte

- ▶ Analysis und Numerik (K. Deckelnick) für Willmoreflächen, zunächst rotationssymmetrisch.
- ▶ Schon einige unerwartet Existenz- und Verzweigungs-“Resultate”.
- ▶ Hat man in diesem Zusammenhang geordnete Familien von Lösungen?
- ▶ Positivitätserhaltung?
- ▶ Variationstechniken und numerische Algorithmen weiterentwickeln!

Projekte

- ▶ Analysis und Numerik (K. Deckelnick) für Willmoreflächen, zunächst rotationssymmetrisch.
- ▶ Schon einige unerwartet Existenz- und Verzweigungs-“Resultate”.
- ▶ Hat man in diesem Zusammenhang geordnete Familien von Lösungen?
- ▶ Positivitätserhaltung?
- ▶ Variationstechniken und numerische Algorithmen weiterentwickeln!
- ▶ Großes (!!) Ziel: Analysis und Numerik für allgemeine Willmoreflächen mit vorgeschriebenen Randdaten.