Positive Lösungen elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung mit kritischem Wachstum in kontrahierbaren Gebieten

An der Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science
angefertigte

Masterarbeit

vorgelegt von
Eva Barlage
geboren am 11.01.1990 in Cloppenburg,
Studiengang Mathematik mit Anwendungsfach Informatik,
Matrikelnummer 193514.

15. Dezember 2016

Betreut am Institut für Analysis und Numerik von
Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Christoph Grunau

Inhaltsverzeichnis

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Eva Barlage, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Magdeburg, den 15. Dezember 2016

Eva Barlage

Einleitung

In dieser Arbeit geht es um die Existenz von nicht-trivialen positiven Lösungen der Differentialgleichung

$$-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \tag{0.1}$$

wobei $n > 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes beschränktes Gebiet ist.

Für den subkritischen Fall, d.h. mit einem Exponenten echt kleiner als $\frac{n+2}{n-2}$ auf der rechten Seite, bekommt man mit klassischen Methoden der Variationsrechnung gute Existenzresultate für nicht-triviale Lösungen. Im hier vorliegenden kritischen Fall sieht dies anders aus. Aus der Pohozaev-Identität [1] folgt, dass die Gleichung (0.1) keine nicht-triviale (positive) Lösung hat, wenn Ω strikt sternförmig ist. Erst ein tiefgehendes Resultat von Bahri und Coron [4] besagt, dass die Gleichung (0.1) eine positive Lösung besitzt, falls Ω eine nicht-triviale Topologie hat. Für $n = 3$ zeigen sie, dass ihre Voraussetzung äquivalent dazu ist, dass Ω nicht kontrahierbar ist, d.h. dass es keine stetige Abbildung $H : \Omega \times [0,1] \to \Omega$ gibt, sodass $H(x,0) = x$ für alle $x \in \Omega$ und $H(x,1) = p$ für alle $x \in \Omega$ und ein festes $p \in \Omega$ gilt. Es stellt sich die Frage, ob man auch in Gebieten mit trivialer Topologie positive Lösungen finden kann.

E. N. Dancer gibt diesbezüglich in seinem dreiseitigen Paper „A Note on an Equation with Critical Exponent“ [5] eine Anleitung, wie für $n > 2$ ein zu einer Kugel homöomorphes Gebiet Ω konstruiert werden kann, für das die Gleichung (0.1) eine nicht-triviale positive Lösung hat. Diese Lösung ist sogar nicht-degeneriert, d.h. die linearisierte Gleichung hat nur die triviale Lösung (vgl. Satz 2.2).

Dies soll helfen, besser zu verstehen, wann (0.1) nicht-triviale Lösungen besitzt, da man unter Ausnutzung der konformen Invarianz leicht nicht-sternförmige Gebiete finden kann, für die nur die triviale Lösung existiert. Dancers Resultat unterstreicht, dass die konkrete Geometrie des Gebiets Ω wichtig ist und nicht nur seine topologischen Eigenschaften.

In dieser Arbeit wird Dancers teilweise sehr lückenhaft verfasste und im Detail vereinzelt fehlerhafte Anleitung ausführlich ausgearbeitet, korrigiert und vollständig aufgeschrieben.

In Kapitel 1 werden zunächst einige Grundlagen aus den Gebieten der Funktionalanalysis und der partiellen Differentialgleichungen sowie wichtige in späteren Kapiteln

[1] [22], vgl. Satz 1.23

verwendete Resultate wiederholt.

In Kapitel 2 wird ein recht weiter Konvergenzbegriff für Folgen von Gebieten Ω_k gegen Ω_0 eingeführt, der sogar Topologieänderungen zulässt. Außerdem wird Satz 2.2 bewiesen, in dem aus der Existenz einer Lösung von $-\Delta u = f(u)$ in Ω_0 die Existenz einer Lösung in Ω_k für hinreichend große k gefolgert wird. Dabei ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1 und erfüllt eine Wachstumsbedingung. Dieser Satz wurde von Dancer in [6] für den subkritischen Fall bewiesen und wird hier mit den Angaben aus [5] für beliebig große Exponenten in der Wachstumsbedingung erweitert. Für den Beweis des Satzes wird zunächst mit Lemma 2.3 eine gleichmäßige Abschätzung für Lösungen der Poisson-Gleichung bewiesen.

Kapitel 3 befasst sich schließlich in mehreren Schritten mit der Konstruktion des gewünschten Beispielgebiets aus einem Annulus $\tilde{A}$. Zunächst wird ein Generizitätsresultat von Saut und Temam [24] nachgearbeitet, dessen Beweis über den Transversalitätssatz 3.2 geführt wird. Damit kann $\tilde{A}$ so deformiert werden, dass die Gleichung (0.1) auf dem entstehenden Gebiet nur nicht-degenerierte Lösungen hat. Aus dem Resultat von Bahri und Coron[2] folgt die Existenz einer positiven Lösung. Dann wird in das Gebiet ein „Loch“ geschnitten und gezeigt, dass dies bei dem in Kapitel 2 gewählten Konvergenzbegriff zulässig ist. Nun kann Satz 2.2 benutzt werden, um zu zeigen, dass auch auf dem resultierenden Gebiet eine positive nicht-degenerierte Lösung existiert. Schließlich wird noch gezeigt, dass das konstruierte Gebiet homöomorph zu einer Kugel ist, sodass es nicht die Voraussetzungen des Satzes von Bahri und Coron erfüllt, ihre Voraussetzung also hinreichend aber nicht notwendig für die Existenz einer positiven Lösung ist.

[2] [4], siehe auch Satz 3.6

1. Grundlagen

In diesem Kapitel werden Grundlagen aus Analysis und Funktionalanalysis wiederholt sowie Definitionen und Sätze angegeben, die in späteren Kapiteln Verwendung finden. Zunächst geben wir die Definition der wichtigsten Funktionenräume und einige ihrer Eigenschaften an.

1.1. Funktionenräume

Im Folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zunächst wiederholen wir die Definition der *Räume stetig differenzierbarer Funktionen*. Dazu sei $m \in \mathbb{N}_0$ und Y ein Banachraum mit Norm $|.|_Y$. Dann ist

$$C^m(\Omega; Y) := \{u : \Omega \to Y : u \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar}\},$$

und

$$C^\infty(\Omega; Y) := \{u : \Omega \to Y : u \text{ ist beliebig oft stetig differenzierbar}\}.$$

Der Raum $C^m(\bar{\Omega}; Y)$ enthält alle $u \in C^m(\Omega; Y)$, für die alle Ableitungen stetig auf $\partial\Omega$ fortgesetzt werden können, und ist für beschränktes Ω mit der Norm

$$\|u\|_{C^m} := \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = \sum_{s \leq m} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^s u(x)|_Y$$

ein Banachraum (vgl. auch [2, Abschnitt 1.6]). Weiterhin bezeichnet $C_0^\infty(\Omega; Y)$ die Menge aller Funktionen $u \in C^\infty(\Omega; Y)$ mit kompaktem Träger in Ω, wobei der Träger definiert ist als $\operatorname{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$. Entsprechend ist auch $C_0^m(\Omega; Y)$ erklärt. Für $Y = \mathbb{R}$ schreiben wir auch $C^m(\bar{\Omega}) = C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

Besondere Räume stetig differenzierbarer Funktionen sind die Hölder-Räume, die auch eine wichtige Rolle in der Theorie partieller Differentialgleichungen spielen. Dabei heißt eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig Hölder-stetig in* Ω *mit Exponent* $\alpha \in (0, 1]$, wenn der Ausdruck

$$[u]_\alpha := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

endlich ist. Ist $\alpha = 1$, so nennen wir u *Lipschitz-stetig in* Ω. Für ein beschränktes Ω sind die *Hölder-Räume* definiert als

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \Big\{ u \in C^k(\Omega) : [u]_{k,\alpha} := \sup_{|\beta|=k} [D^\beta f]_\alpha < \infty \Big\}.$$

Für $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir auch $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega)$ und $C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega)$. Ausgestattet mit den Normen

$$\|.\|_{k,\alpha} := \|.\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|.\|_{C^k(\bar{\Omega})} + [.]_{k,\alpha}$$

sind die Hölder-Räume Banachräume (siehe [12, S. 73]). Hölder-stetige Funktionen sind insbesondere gleichmäßig stetig.

Wir betrachten häufig Gebiete Ω, deren Rand besondere Eigenschaften erfüllt (vgl. [12, Abschnitt 6.2]). Dabei sagen wir, dass Ω *in der Klasse* $C^{k,\alpha}$ oder $C^{k,\alpha}$*-glatt* (für $0 \leq \alpha \leq 1$) ist, falls für jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B = B(x_0)$ und eine bijektive Abbildung $\Psi : B \to D$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen existieren, sodass

(i) $\Psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$,

(ii) $\Psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$,

(iii) $\Psi \in C^{k,\alpha}(B)$, $\Psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Wir sagen, dass Ω einen *Lipschitz-Rand* hat, falls Ψ und Ψ^{-1} Lipschitz-stetig sind.

Als nächstes sollen kurz die Räume integrierbarer Funktionen wiederholt werden. Die *Lebesgue-Räume* sind definiert als

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &:= \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ ist messbar und } \int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \Big\}, \ 1 \leq p < \infty, \\ L^\infty(\Omega) &:= \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ ist messbar und } \exists N \subset \Omega, |N| = 0 : \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Auf diesen Räumen identifizieren wir Funktionen, die außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen, d.h.

$$u = v \text{ in } L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ fast überall in } \Omega.$$

Dann sind die L^p-Räume mit den Normen

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

bzw.

$$\|u\|_{L^\infty} := \inf_{|N|=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)|$$

Banachräume und $L^2(\Omega)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2} := \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$$

ein Hilbert-Raum (vgl. [9, S. 71-73]). Außerdem ist

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(K) \text{ für alle } K \subset \Omega, K \text{ kompakt}\}.$$

Ein wichtiges Resultat für lokal integrierbare Funktionen (siehe [9, Satz 5.1]) ist:

Satz 1.1. (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$\int\limits_{\Omega} u\phi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u = 0$ f.ü. in Ω.

Außerdem spielen bei der Arbeit mit Lebesgue-Räumen folgende Konvergenzsätze häufig eine große Rolle:

Satz 1.2. (Satz von Riesz-Fischer)
Sei $1 \leq p < \infty$, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Dann existieren ein $f \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$, sodass $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ und $f_{k_l}(x) \to f(x)$ punktweise fast überall in Ω.

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [2, Satz 1.21,Lemma 1.22].

□

Satz 1.3. (Allgemeiner Konvergenzsatz von Lebesgue)
Es seien $f_k, f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und es konvergiere $g_k \to g$ für $k \to \infty$ in $L^1(\Omega)$. Weiter sei $1 \leq p < \infty$. Gilt dann

$$\begin{aligned} f_k &\to f \quad \text{fast überall für } k \to \infty, \\ |f_k|^p &\leq g_k \quad \text{fast überall für alle } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so folgt, dass $f_k, f \in L^p(\Omega)$ und $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$.

Beweis. Ein Beweis ist z.B. bei [2, Satz 1.25] zu finden.

□

Satz 1.4. (Allgemeiner Konvergenzsatz von Vitali)
Seien $f_k \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ und es gelte $f_k \to f$ punktweise fast überall für $k \to \infty$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in L^p(\Omega)$ und $\|f_k - f\|_p \to 0$ für $k \to \infty$.

(ii) Es gilt

$$\sup_k \int\limits_E |f_k|^p \,\mathrm{d}x \to 0 \text{ für } |E| \to 0,$$

und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine messbare Menge E_ε mit $|E_\varepsilon| < \infty$ und

$$\sup_k \int\limits_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |f_k|^p \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [2, Satz 1.23].

□

Bemerkung 1.5. Für beschränkte Ω ist die zweite Bedingung in Satz 1.4 (ii) für alle $\varepsilon > 0$ sofort erfüllt mit $E_\varepsilon = \Omega$.

Auf den L^p-Räumen können wir jetzt einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff einführen: Sei dazu $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ besitzt eine *α-te schwache Ableitung in* Ω, wenn es eine Funktion $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt mit

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \phi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \phi \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Man schreibt $D^\alpha u = u_\alpha$. Die schwache Ableitung ist eindeutig, sofern sie existiert. Eine klassisch differenzierbare Funktion ist auch schwach differenzierbar und die Ableitungen stimmen fast überall überein (vgl. [9, S. 88]). Damit können wir für $1 \le p \le \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die *Sobolev-Räume* durch

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \text{ existiert und } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le m\}.$$

definieren. Versehen mit den Normen

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

bzw.

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$$

sind die Sobolev-Räume Banachräume und mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{W^{m,2}} := \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, \mathrm{d}x$$

ist $W^{m,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum (vgl. [9, S. 91]). Außerdem bezeichnen wir mit $W_0^{m,p}(\Omega)$ den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ bzgl. der $W^{m,p}$-Norm. Insbesondere ist $W_0^{1,2}(\Omega)$ wieder ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{W_0^{1,2}} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

Die Definitheit dieses Skalarprodukts folgt aus der Poincaré-Ungleichung:

Satz 1.6. (Poincaré-Ungleichung)
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so gibt es eine Konstante $C_0 = C_0(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x \le C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [2, Abschnitt 4.7].

□

Man schreibt auch $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ bzw. $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$.

Satz 1.7. (Satz von Rademacher)
Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand hat jede Lipschitz-stetige Funktion schwache Ableitungen 1. Ordnung, die in $L^\infty(\Omega)$ liegen. (Siehe [2, Satz 8.5]).

Für Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ kann man unter bestimmten Bedingungen an Ω in einer verallgemeinerten Form von Randwerten sprechen (vgl. [10, S. 272]):

Satz 1.8. (Spursatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt in der Klasse C^1 und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es genau eine stetige lineare Abbildung

$$S : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \quad \text{(Spuroperator)},$$

so dass

$$Su = u\big|_\Omega \quad \textit{für } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Dabei gilt

$$\|Su\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \textit{für } u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei die Konstante C nur von p und Ω abhängt. Die Su heißen Spurwerte *oder* schwache Randwerte von u auf $\partial\Omega$. *In der Regel schreibt man $u(x)$ statt $Su(x)$ für $x \in \partial\Omega$.*

Eine Eigenschaft, die bei der Arbeit mit Funktionenräumen häufig wichtig ist, ist die Separabilität dieser: Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Bemerkung 1.9. Beispiele für separable Räume sind (vgl. [2, Abschnitt 2.18]):

(1) $\mathbb{R}^n$ ist separabel.

(2) Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so ist $L^p(S)$ separabel für $1 \le p < \infty$. Falls S keine Nullmenge ist, so ist $L^\infty(S)$ *nicht* separabel.

(3) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $m \ge 0$ und Y ein separabler Banachraum, so ist $C^m(\bar{\Omega}; Y)$ separabel.

(4) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$, so ist $W^{m,p}(\Omega)$ separabel.

(5) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 < \alpha \leq 1$, so sind die $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ *nicht* separabel.

1.2. Funktionale und Operatoren

In diesem Abschnitt geht es um lineare Funktionale, Operatoren und ihre Eigenschaften sowie den Begriff der schwachen Konvergenz.

Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume sowie $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann gilt (siehe [2, Lemma 3.1]):

$$T \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ ist beschränkt, d.h. } \exists C \geq 0 : \forall x \in X : \|F(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Man schreibt statt $T(x)$ auch Tx oder $T.x$, wobei letzteres häufig verwendet wird, wenn T durch einen komplizierteren Ausdruck beschrieben wird (z.B. als Ableitung eines Operators).

Ist $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, dann heißt

$$X' := \{F : X \to \mathbb{R} : F \text{ ist linear und stetig}\}$$

der *Dualraum* von X. Die Elemente aus X' heißen *stetige lineare Funktionale*. X' ist mit

$$\|F\|_{X'} := \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|}$$

ein Banachraum (vgl. [9, S. 23f.]). Man schreibt statt $F(x)$ auch $\langle F, x\rangle$ oder $\langle x, F\rangle$. Für Hilberträume können die Elemente des Dualraums wie folgt charakterisiert werden:

Satz 1.10. (Rieszscher Darstellungssatz)
Sei $(H, (.,.)_H)$ ein reeller Hilbertraum. Dann gibt es für jedes $F \in H'$ genau ein $y \in H$ mit

$$F(x) = (x, y)_H \quad \text{für alle } x \in H$$

und $\|F\|_{H'} = \|y\|_H$, d.h. die Abbildung $R_H : H \to H'$ mit

$$R_H(y)(x) = (x, y)_H$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Für einen Beweis siehe [9, Satz 2.25] bzw. [2, Satz 4.1].

□

Über den Dualraum definiert man einen neuen Konvergenzbegriff auf dem Banachraum X (vgl. [2, Def. 6.1(1)]): Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt *schwach konvergent* gegen ein $x \in X$, falls für alle $F \in X'$ gilt, dass

$$F(x_k) \to F(x), \quad k \to \infty.$$

Man schreibt $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$. Der schwache Limes ist, sofern er existiert, eindeutig bestimmt. Die Normkonvergenz einer Folge impliziert die schwache Konvergenz und schwach konvergente Folgen sind beschränkt. Außerdem folgt aus $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$, dass $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|x_k\|_X$ (vgl. [2, Bem. 6.3]).

Für Hilberträume $(H, (.,.)_H)$ folgt direkt aus dem Rieszschen Darstellungssatz 1.10 folgende äquivalente Charakterisierung der schwachen Konvergenz:

$$x_k \rightharpoonup x \text{ für } k \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad (x_k, y)_H \to (x, y)_H \text{ für } k \to \infty \text{ für alle } y \in H.$$

Außerdem gilt (siehe [2, Bsp. 6.11]):

Lemma 1.11. *In einem Hilbertraum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Man bezeichnet mit $W^{-1,2}(\Omega) := (W_0^{1,2}(\Omega))'$ den Dualraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$. Eine messbare Funktion f kann als Element von $W^{-1,2}(\Omega)$ aufgefasst werden, falls die Abbildung

$$v \mapsto \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

ein stetiges lineares Funktional auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert. Für $1 < p,\ q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt außerdem, dass $L^p(\Omega)' \cong L^q(\Omega)$ (siehe [9, Satz 4.30]).

Im Folgenden wird es um Eigenschaften von Operatoren zwischen Banachräumen X und Y gehen. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *präkompakt*, falls jede Folge $(x_k) \subset M$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Ein stetiger Operator $F : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls für alle beschränkten Mengen $A \subset X$ gilt, dass $F(A)$ präkompakt ist.

Kompaktheit spielt zum Beispiel bei Einbettungsoperatoren eine wichtige Rolle:

Satz 1.12. (Einbettungssatz von Sobolev)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Weiter seien $m_1,\ m_2 \geq 0$ ganze Zahlen, sowie $1 \leq p_1,\ p_2 < \infty$. Dann gilt: Ist

$$m_1 - \frac{n}{p_1} \geq m_2 - \frac{n}{p_2}, \text{ sowie } m_1 \geq m_2, \tag{1.1}$$

so existiert eine stetige Einbettung $W^{m_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m_2,p_2}(\Omega)$. Dabei ist $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Für $u \in W^{m_1,p_1}(\Omega)$ gilt also mit einer Konstanten C, die von $n,\ \Omega,\ m_1,\ p_1,\ m_2$ und p_2 abhängt, eine Abschätzung

$$\|u\|_{W^{m_2,p_2}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m_1,p_1}(\Omega)}.$$

Gilt in beiden Bedingungen in (1.1) die strikte Ungleichung, so ist die Einbettung sogar kompakt, d.h. jede in $W^{m_1,p_1}(\Omega)$ beschränkte Folge besitzt eine in $W^{m_2,p_2}(\Omega)$ konvergente Teilfolge. Für $W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ gelten die Aussagen ohne eine Voraussetzung an $\partial\Omega$.

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [2, Satz 8.9].

□

Der folgende Satz ist ein wichtiges Resultat, das die Kompaktheit vieler Operatoren auf Funktionenräumen sicherstellt.

Satz 1.13. (Satz von Arzelà-Ascoli)
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \subset C^0(S;Y)$, wobei Y endlich dimensional ist. Dann gilt:

$$A \text{ ist präkompakt} \;\Leftrightarrow\; A \text{ ist beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Die Menge A heißt beschränkt und gleichgradig stetig*, falls*

(1) $\sup\limits_{f\in A}\sup\limits_{x\in S}|f(x)| < \infty$,

(2) $\sup\limits_{f\in A}|f(x) - f(y)| \to 0$ *für* $x, y \in S$ *mit* $|x-y| \to 0$.

Beweis. Ein Beweis ist z.B. bei [2, Satz 2.12] zu finden.

□

Der Operator $F : X \to Y$ heißt *(Fréchet-) differenzierbar in* $u \in X$, wenn eine stetige lineare Abbildung $L_u : X \to Y$ existiert, sodass

$$F(u+v) - F(u) = L_u(v) + o(\|v\|_X), \text{ für } \|v\|_X \to 0.$$

Man schreibt für L_u auch $DF(u)$ oder $F'(u)$.

In späteren Kapiteln werden wir auch die Definition von Fredholm-Operatoren brauchen:

Definition 1.14. Ein stetiger linearer Operator $A : X \to Y$ heißt *Fredholm-Operator*, falls gilt:

(1) $\dim \ker(A) < \infty$,

(2) das Bild von A, $\operatorname{im}(A)$, ist abgeschlossen,

(3) $\operatorname{codim} \operatorname{im}(A) < \infty$.

Der Index eines Fredholm-Operators ist definiert durch

$$\operatorname{ind}(A) := \dim \ker(A) - \operatorname{codim} \operatorname{im}(A).$$

Dabei bedeutet die Endlichkeit der Kodimension des Bildes von A, dass $Y = \operatorname{im}(A) \oplus Y_0$ für einen endlichdimensionalen Unterraum $Y_0 \subset Y$ ist. Dann ist $\operatorname{codim} \operatorname{im}(A) := \dim Y_0$ unabhängig von der Wahl von Y_0 (vgl. [2, Abschnitt 9.6]).

Wichtig ist, dass kompakte Störungen von Fredholm-Operatoren immer noch Fredholm-Operatoren sind (siehe [19, Thm. 16.9]):

Lemma 1.15. *Ist $T : X \to Y$ ein Fredholm-Operator und $K : X \to Y$ kompakt, so ist $T + K$ ein Fredholm-Operator und* $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$.

Ein Operator zwischen Banachräumen induziert einen Operator zwischen den entsprechenden Dualräumen: Ist $T : X \to Y$ stetig und linear, so ist *adjungierte* (oder *duale*) *Operator* $T' : Y' \to X'$ durch $(T'y')(x) = y'(Tx)$ definiert. T' ist wiederum ein linearer stetiger Operator. Sind X, Y Hilberträume und $R_X : X \to X'$ sowie $R_Y : Y \to Y'$ die Isometrien aus dem Riesz'schen Darstellungssatz 1.10, so sei

$$T^* := R_X^{-1} T' R_Y.$$

Dann ist $T^* : Y \to X$ ein stetiger linearer Operator und es gilt für alle $x \in X$, $y \in Y$, dass $\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^*y\rangle_X$ (vgl. [2, Abschnitt 10.2]).

Über den dualen Operator kann die Lösbarkeit von Gleichungen charakterisiert werden (siehe [28, Kor. III.4.6]):

Satz 1.16. *Sei $T : X \to Y$ ein stetiger Operator mit abgeschlossenem Bild. Dann ist die Gleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn die Implikation*

$$T'y' = 0 \;\Rightarrow\; y'(y) = 0$$

gilt.

Sei nun $\Omega \subset X$ offen und $F : \bar{\Omega} \to X$ kompakt. Wir wollen einen Abbildungsgrad für F definieren. Dazu brauchen wir (vgl. [3, S. 37]):

Lemma 1.17. *Ist $F : \bar{\Omega} \to X$ kompakt, so existiert eine Folge von stetigen Operatoren F_k mit endlichdimensionalem Bild, d.h. $F_k(\bar{\Omega}) \subset X_k \subset X$ mit $\dim X_k = k$, sodass die F_k gleichmäßig gegen F konvergieren.*

Sei $z \in \Omega$ so, dass $z \notin (I - F)(\partial\Omega)$, wobei I die Identität auf X bezeichnet. Dann definieren wir den *Leray-Schauder-Abbildungsgrad* durch

$$\deg(I - F, \Omega, z) = \lim_{k\to\infty} \deg((I - F_k)|_{\Omega\cap X_k}, \Omega \cap X_k, z),$$

wobei es sich auf der rechten Seite um den Brouwerschen Abbildungsgrad (vgl. [3, Kap. 4.1]) handelt. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge und damit wohldefiniert (vgl. z.B. [3, Lemma 4.2.2]).

Einige wichtige Eigenschaften des Abbildungsgrades sollen hier genannt werden.

Satz 1.18. (Homotopie-Eigenschaft)
Sei $T\,[0,1] \times \bar{\Omega} \to X$ stetig und so, dass $T(t,.)$ für alle $t \in [0,1]$ eine kompakte Abbildung ist. Wenn $u - T(t,u) \neq b$ für alle $u \in \partial\Omega$ und alle $t \in [0,1]$, dann ist $\deg(I - T(t,.), \Omega, b)$ unabhängig von t. (Siehe [3, Prop. 4.2.4]).

Diese Eigenschaft hat ihren Namen daher, dass die Abbildung T eine Homotopie ist:

Definition 1.19. (Homotopie)
Seien X und Y topologische Räume. Eine *Homotopie* von X nach Y ist eine Schar

$h_t : X \to Y$ von Abbildungen, wobei der Parameter t das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ durchläuft, sodass die Funktion $H : X \times I \to Y$ definiert durch $H(x, t) = h_t(x)$ stetig ist. (Dabei hat $X \times I$ die Produkttopologie.) Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop* (Bezeichnung: $f \simeq g$), wenn es eine Homotopie $h_t : X \to Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$ gibt. Die Schar h_t oder die zugehörige Abbildung H heißen dann eine *Homotopie* von f nach g, wir schreiben dafür $h_t : f \simeq g$ oder $H : f \simeq g$ (vgl. [27, Def. 2.1.1]). Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt eine *Homotopieäquivalenz* (Bezeichnung: $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ oder $f : X \simeq Y$), wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit $gf \simeq id_X$ und $fg \simeq id_Y$. Jede solche Abbildung g heißt ein *Homotopie-Inverses* von f. Zwei Räume X und Y sind *vom gleichen Homotopietyp* (Bezeichnung: $X \simeq Y$), wenn es eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ gibt (siehe [27, Def. 2.4.1]).

Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation (vgl. [27, Satz 2.1.2]), ebenso die Relation „vom gleichen Homotopietyp sein“ (siehe [27, S. 62]).

Ist der Abbildungsgrad einer Funktion nicht Null, so kann man Aussagen über die Lösbarkeit von Gleichungen treffen:

Satz 1.20. (Lösungs-Eigenschaft)
Ist $\deg(I - F, \Omega, b) \neq 0$, *dann existiert ein* $x \in \Omega$ *mit* $(I - F)(x) = b$.
(Siehe [3, S. 36-37]).

Sei $x_0 \in X$, U eine Umgebung von x_0 und $F : U \to X$ kompakt. Außerdem sei $(I - F)(x_0) = 0$ und mit einem geeigneten $r > 0$ gelte $(I - F)(x) \neq 0$ für alle $x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. Wir definieren den *Index der isolierten Nullstelle* x_0 von $(I - F)$ durch

$$\operatorname{ind}(I - F, x_0) := \deg(I - F, \Omega, 0),$$

wobei $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset B_r(x_0)$ offen ist.

Für differenzierbare Abbildungen können wir folgende Aussage über den Index treffen (siehe [3, Thm. 4.2.11]):

Satz 1.21. *Es sei* $F : \Omega \to X$ *kompakt und Fréchet-differenzierbar. Außerdem sei* 1 *kein Eigenwert von* $F'(0)$. *Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(I - F, 0) = \operatorname{ind}(I - F'(0), 0) \in \{1, -1\}.$$

1.3. Partielle Differentialgleichungen

Eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* der Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei $f \in L^p(\Omega)$ ist für ein $1 \leq p < \infty$, wenn für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega uf \, \mathrm{d}x.$$

Für diese und kompliziertere Differentialgleichungen kann man eine Eindeutigkeitsaussage über folgenden Satz bekommen, der z.B. bei [15, S. 83] zu finden ist.

Satz 1.22. (Eindeutigkeit für das Cauchy-Problem)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und B eine Kugel, sodass $B \cap \partial\Omega$ eine C^2-Hyperfläche ist. Zudem seien $a_{ij} = a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$$

für $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $c_0 > 0$. Weiterhin sei $u \in W^{2,2}(\Omega)$ und es gebe eine Konstante K, sodass

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq K\big(|\nabla u(x)| + |u(x)|\big) \textit{ f.ü. in } \Omega.$$

Fast überall auf $\partial\Omega \cap B$ sei $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, d.h.

$$\int_{\partial\Omega \cap B} |u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \mathrm{dS}(x) = 0,$$

sodass, wenn wir $u = 0$ in $B \setminus \Omega$ setzen, $u \in W^{2,2}(B \cup \Omega)$ ist. Dann ist $u = 0$ fast überall in Ω.

Als nächstes wollen wir die schon erwähnte Pohozaev-Identität nennen, aus der ein Nichtexistenzresultat für die in dieser Arbeit betrachtete Differentialgleichung folgt.

Satz 1.23. (Pohozaev-Identität, [22])
Seien $n > 2$, $p = \frac{n+2}{n-2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet. Es bezeichne ν die äußere Normale an $\partial\Omega$. Dann gilt für jede (klassische) Lösung u von

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1} u \text{ in } \Omega, \;\; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

die Pohozaev-Identität

$$2\lambda \int_{\Omega} u^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 x \cdot \nu \,\mathrm{dS}(x).$$

Ist Ω strikt sternförmig, d.h. $x \cdot \nu > 0$ überall auf $\partial\Omega$, und $\lambda = 0$, so ist $\partial_\nu u = 0$ und damit $\nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$. Daraus folgt, dass auch die zweiten Ableitungen auf dem Rand verschwinden. Dann kann u nach $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ durch 0 fortgesetzt werden, sodass $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die Differentialgleichung löst. Aus dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit [23] folgt $u(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$, also insbesondere in Ω.

Für $\lambda = 0$ und positive u ist die Differentialgleichung aus Satz 1.23 gleich der in (0.1), sodass für diese die Nichtexistenz von nicht-trivialen positiven Lösungen in strikt sternförmigen Gebieten folgt. Indem man die rechte Seite von $-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ für nicht-positive u durch die ungerade Fortsetzung ersetzt (sonst ist die Differentialgleichung für negative u gegebenfalls nicht definiert), erhält man wieder die Gleichung aus 1.23 mit $\lambda = 0$. Die Gleichung (0.1) hat also in strikt sternförmigen Gebieten gar keine nicht-triviale Lösung.

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir noch die Definition der Kapazität einer Menge ein (vgl. dazu [16, Def. II.6.10]).

Definition 1.24. Sei $E \subset \Omega$ kompakt. Wir definieren

$$K_E := \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : v \geq 1 \text{ auf } E \text{ in } W^{1,2}(\Omega)\}.$$

Dann ist die *Kapazität von E* bzgl. Ω, $\mathrm{cap}_\Omega(E)$, oder einfach $\mathrm{cap}(E)$ definiert durch

$$\mathrm{cap}(E) = \inf_{v \in K_E} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Eine Menge $F \subset \Omega$ hat Kapazität 0, wenn $\mathrm{cap}(E) = 0$ für alle kompakten $E \subset F$.

Satz 1.25. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ist $n > 2$ und $\mathcal{H}^{n-2}(E) < \infty$, so ist $\operatorname{cap}(E) = 0$. Dabei ist $\mathcal{H}^d$ das d-dimensionale Hausdorff-Maß.*

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [18, Sect. 7.2.3, Prop. 3]. $\square$

Lemma 1.26. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt mit $\operatorname{cap}(K) = 0$. Dann ist die Menge*

$$V := \{\phi \in W_0^{1,2}(\Omega) \ : \ \phi = 0 \textit{ in einer Umgebung von } K\}$$

dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. Siehe auch [7, S. 452]. Nach der Definition der Kapazität und wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ findet man für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{w}_k \in C_0^\infty(\Omega)$, sodass $\tilde{w}_k \geq 1$ auf K, $\tilde{w}_k \geq 0$ in Ω und

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{w}_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$$

gilt. Setze $w_k = g((1+\delta_k)\tilde{w}_k)$, wobei $g(y) = \min(y, 1)$ und $\delta_k = \frac{1}{k}$. Als Minimum zweier Lipschitz-stetiger Funktionen ist g wieder Lipschitz-stetig und besitzt nach Satz 1.7 eine schwache Ableitung, für die $|g'(y)| \leq 1$ für alle $y \in \Omega$ gilt. Damit ist $0 \leq w_k \leq 1$, $w_k = 1$ in einer Umgebung von K und

$$\int_\Omega |\nabla w_k|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |g'((1+\delta_k)\tilde{w}_k)\nabla \tilde{w}_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla \tilde{w}_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}.$$

Sei nun $v \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, dann ist $(1-w_k)v \in V$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\|(1-w_k)v - v\|_{1,2}^2 = \|w_k v\|_{1,2}^2 &= \|\nabla(w_k v)\|_2^2 = \|\nabla w_k \cdot v + \nabla v \cdot w_k\|_2^2 \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla w_k \cdot v|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega |\nabla v \cdot w_k|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq 2\underbrace{\|v^2\|_\infty}_{<\infty} \int_\Omega |\nabla w_k|^2 \,\mathrm{d}x + 2\underbrace{\||\nabla v|^2\|_\infty}_{<\infty} \underbrace{\|w_k\|_2^2}_{\overset{1.6}{\leq} C\|\nabla w_k\|_2^2 \leq C\frac{1}{k}} \\
&\leq C\frac{1}{k} \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$ liegt, zeigt dies die Behauptung. $\square$

2. Existenz von Lösungen in konvergierenden Gebieten

In diesem Kapitel geht es darum, wie man aus der Existenz einer Lösung einer Differentialgleichung in einem Gebiet die Existenz von Lösungen in „nahen" Gebieten folgern kann. „Nah" wird dabei nach der folgenden Definition aus [5] verstanden:

Definition 2.1. (Konvergenz von Gebieten)
Es seien Ω_k für $k \in \mathbb{N}$ beschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^n$ und $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir sagen, dass $\Omega_k \to \Omega_0$ für $k \to \infty$, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit Kapazität 0 und eine kompakte Nullmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass gilt:

i) Ist K_1 eine kompakte Teilmenge von $\Omega_0 \setminus K$, dann ist $K_1 \subset \Omega_k$ für große k,

ii) ist U eine offene Umgebung von $\bar{\Omega}_0 \cup E$, dann ist $\Omega_k \subset U$ für große k,

iii) für alle $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ mit $u(x) = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_0$ gilt $u \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$.

Bedingung (iii) ist eine Bedingung an die Regularität von $\partial\Omega_0$ und gilt für große Klassen von Gebieten, z.B. für solche mit C^1-Rand.

Der folgende Satz besagt, dass man unter bestimmten Voraussetzungen an die Differentialgleichung eine Lösung in Ω_k für hinreichend große k findet, wenn man eine Lösung in Ω_0 hat. Er ist in [5] zu finden.

Satz 2.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1 und $q > 1$ so, dass $|f(y)| \leq C|y|^q$ für große $|y|$. Weiterhin sei u_0 eine Lösung von*

$$-\Delta u = f(u) \ \textit{in}\ \Omega_0,\ \ u = 0 \ \textit{auf}\ \partial\Omega_0$$

in $L^\infty(\Omega_0) \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$, die nicht-degeneriert ist, d.h. die Gleichung

$$-\Delta h - f'(u_0)h = 0$$

hat nur die triviale Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$. Außerdem gelte $\Omega_k \to \Omega_0$ für $k \to \infty$ und $r > \frac{1}{2}nq$. Dann hat die Gleichung

$$-\Delta u = f(u) \ \textit{in}\ \Omega_k,\ \ u = 0 \ \textit{auf}\ \partial\Omega_k \tag{2.1}$$

für große k eine eindeutige Lösung $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega_k) \cap L^r(\Omega_k)$, die in $L^r(\tilde{B})$ nahe an u_0 ist, wobei $\tilde{B}$ ein beschränktes Gebiet ist sowie $\Omega_k \subset \tilde{B}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Darüber hinaus sind für hinreichend große k die u_k nicht-degenerierte Lösungen von (2.1).

Diesen Satz werden wir in Abschnitt 2.2 beweisen. Abschnitt 2.1 befasst sich mit dem Beweis eines dafür benötigten Lemmas.

2.1. Abschätzung von Lösungen der Poisson-Gleichung

Im Beweis von Satz 2.2 wird folgendes Lemma eine große Rolle spielen, das die gleichmäßige Abschätzung der L^∞-Norm von Lösungen der Poisson-Gleichung ermöglicht. Im Folgenden schreiben wir für $1 \leq p \leq \infty$ statt $\|.\|_{L^p}$ einfach $\|.\|_p$.

Lemma 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $p > \frac{2n}{n+2}$, $f \in L^p(\Omega)$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $-\Delta u = f$ in Ω im schwachen Sinne. Dann gibt es eine positive Konstante C, die nur von n, p und $|\Omega|$ abhängt, sodass*

$$\|u\|_{m(p)} \leq C\|f\|_p,$$

wobei $m(p) = \frac{np}{n-2p}$, falls $p < \frac{1}{2}n$ und $m(p) = \infty$, falls $p > \frac{1}{2}n$.

Besonders wichtig ist hierbei, dass die Konstante zwar von $|\Omega|$ abhängt, aber nicht von anderen Eigenschaften des Gebiets.

Beweis. O.B.d.A. sei $\|f\|_p \neq 0$. Sei zunächst $p > \frac{1}{2}n$, dafür vgl. auch den Beweis von Satz 8.15 aus [12]. Für $z \in \mathbb{R}$ und $k > 0$ sei $\bar{z} = |z| + k$ und $\bar{b} = \frac{|f|}{k}$. Damit gilt für alle z:

$$|\bar{z}f| = |\bar{z}k\bar{b}| \leq \bar{z}^2\bar{b}. \tag{2.2}$$

Für $\beta \geq 1$ und $N > k$ definiere $H \in C^1[k, \infty)$ durch

$$H(z) = \begin{cases} z^\beta - k^\beta & \text{für } z \in [k, N], \\ \text{eine lineare Funktion} & \text{für } z \geq N. \end{cases}$$

Sei $w = \bar{u}^+ = u^+ + k$, wobei $u^+ := \max(u, 0)$, und setze punktweise

$$v = G(w) := \int_k^w |H'(s)|^2 \,\mathrm{d}s.$$

Nach der Kettenregel für Sobolev-Funktionen [12, Theorem 7.8] gilt wegen der Konstruktion von H, dass $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\nabla v = G'(w)\nabla w. \tag{2.3}$$

Da $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u = f$ ist, gilt also

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x.$$

Weiterhin ist $\nabla u = \nabla w$, wenn $v > 0$ ist (denn das ist genau dann der Fall, wenn $u^+ > 0$ ist) und es gilt $G(s) \leq sG'(s)$ (wegen der Konvexität von G). Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 G'(w)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla u \nabla w G'(w) \overset{(2.3)}{=} \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f G(w)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f w G'(w)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega G'(w)|fw|\,\mathrm{d}x \overset{(2.2)}{\leq} \int_\Omega \bar{b} G'(w) w^2 \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

also nach der Definition von G

$$\int_\Omega |\nabla (H(w))|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \bar{b} |H'(w)w|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Da $H(w) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, können wir die Sobolev-Ungleichung (Satz 1.12) und die Hölder-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\|H(w)\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} \leq C \left(\int_\Omega \bar{b} (H'(w)w)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\bar{b}\|_p^{1/2} \|H'(w)w\|_{\frac{2p}{p-1}},$$

wobei $\hat{n} = n$ für $n > 2$ und $2 < \hat{2} < 2p$ gewählt wird. Setzt man nun $k = \|f\|_p > 0$, so gilt $\|\bar{b}\|_p = k^{-1}\|f\|_p = 1$, also

$$\|H(w)\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} \leq C \|H'(w)w\|_{\frac{2p}{p-1}}$$

mit $C = C(n, |\Omega|)$. Lässt man nun in dieser Ungleichung bei der Definition von H $N \to \infty$ gehen, so erhält man

$$\|w^\beta - k^\beta\|_{\chi p^*} \leq C\beta \|w^\beta\|_{p^*} \tag{2.4}$$

mit $p^* = \frac{2p}{p-1}$ und $\chi = \frac{\hat{n}(p-1)}{p(\hat{n}-2)} = 1 + \frac{2p-\hat{n}}{p(\hat{n}-2)} > 1$, da $p > \frac{\hat{n}}{2}$. Es gilt sogar

$$\|w^\beta\|_{\chi p^*} \leq C\beta \|w^\beta\|_{p^*}, \tag{2.5}$$

denn da $w \geq k$, ist

$$\begin{aligned} \|w^\beta\|_{\chi p^*} &\leq \|w^\beta - k^\beta\|_{\chi p^*} + \|k^\beta\|_{\chi p^*} \\ &\overset{(2.4)}{\leq} C\beta \|w^\beta\|_{p^*} + C(\chi, |\Omega|, p) \|k^\beta\|_{p^*} \overset{\beta \geq 1}{\leq} C\beta \|w^\beta\|_{p^*}. \end{aligned}$$

Also gilt für $\beta \geq 1$

$$\|w\|_{\beta \chi p^*} \leq (C\beta)^{\frac{1}{\beta}} \|w\|_{\beta p^*}. \tag{2.6}$$

Wir setzen nun $\beta = \chi^m$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$ und erhalten per Induktion mit (2.6)

$$\begin{aligned} \|w\|_{\chi^N p^*} &\leq \left(\prod_{m=0}^{N-1} (C\chi^m)^{\chi^{-m}} \right) \|w\|_{p^*} \\ &\leq C^\sigma \chi^\tau \|w\|_{p^*}, \quad \sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \chi^{-m}, \quad \tau = \sum_{m=0}^{\infty} m\chi^{-m} \\ &\leq C\|w\|_{p^*}, \end{aligned}$$

wobei $C = C(n, p, |\Omega|)$. Für $N \to \infty$ erhalten wir damit

$$\|w\|_\infty \leq C\|w\|_{p^*}$$

und aus der Definition $w = u^+ + k$ folgt

$$\|u^+\|_\infty \leq C(\|u^+\|_{p^*} + k) \leq C(\|u\|_{p^*} + k).$$

Analog zeigt man das Ergebnis für u^-.

Da u schwache Lösung von $-\Delta u = f$ ist, gilt

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f u \,\mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \|u\|_{\frac{p}{p-1}} \overset{1.12}{\leq} C\|f\|_p \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

also

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C\|f\|_p.$$

Damit ergibt sich

$$\|u\|_{p^*} \overset{1.12}{\leq} C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C\|f\|_p$$

und insgesamt

$$\|u\|_\infty \leq C\|f\|_p.$$

Diese Technik der Iteration von L^p-Normen wurde von Moser in [20] eingeführt und heißt deshalb auch „Moser-Iteration“.

Sei nun $\frac{2n}{n+2} < p < \frac{1}{2}n$ (nur für $n > 2$ möglich). Dieser Fall wird ebenfalls durch Moser-Iteration bewiesen. Wir nehmen hier an, dass u^r (für noch zu bestimmendes r) eine geeignete Testfunktion für die Differentialgleichung ist (sonst kann man wie im ersten Fall mit einer ähnlichen Testfunktion arbeiten). Wir multiplizieren also $-\Delta u = f$ mit u^r und integrieren. Sei dabei o.B.d.A. $u \geq 0$ (sonst nehme als Testfunktion $(u^+)^r$ bzw. $(u^-)^r$). Dadurch ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p \|u^r\|_{\frac{p}{p-1}} &\overset{\text{Hölder}}{\geq} \int\limits_\Omega u^r f \,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega -\Delta u \cdot u^r \,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u^r) \,\mathrm{d}x \\
&= r \int\limits_\Omega (\nabla u \cdot \nabla u) u^{r-1} \,\mathrm{d}x = \frac{4r}{(r+1)^2} \int\limits_\Omega \left|\nabla(u^{\frac{r+1}{2}})\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{1.12}{\geq} C(n, |\Omega|) \frac{4r}{(r+1)^2} \left(\int\limits_\Omega \left|u^{\frac{r+1}{2}}\right|^{\frac{2n}{n-2}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{n-2}{n}} = C \frac{4r}{(r+1)^2} \|u\|^{r+1}_{\frac{(r+1)n}{n-2}}.
\end{aligned}$$

Nun ist sicher $\frac{4r}{(r+1)^2} \geq \delta_0 > 0$ für $1 \leq r \leq r_0$ und damit

$$\|u\|^{r+1}_{\frac{(r+1)n}{n-2}} \leq \tilde{c}(n, |\Omega|, r_0) \|f\|_p \|u\|^r_{\frac{rp}{p-1}}. \tag{2.7}$$

Dabei ist $\frac{(r+1)n}{n-2} > \frac{rp}{p-1}$ genau dann, wenn $r < \frac{n(p-1)}{n-2p} =: r_0$. In diesem Fall können wir also eine höhere L^p-Norm durch eine kleinere abschätzen. Für $r_1 = 1$ ist $\frac{r_1 p}{p-1} = \frac{p}{p-1} < \frac{2n}{n-2}$, da $p > \frac{2n}{n+2}$. Somit ist nach 1.12 die Norm auf der rechten Seite in (2.7) beschränkt. Wir wollen nun diese Abschätzung iterieren und setzen dazu $r_1 = 1$ sowie $q_1 = \frac{p}{p-1}$. Dann wählen wir sukzessiv

$$q_{k+1} = \frac{(r_k+1)n}{n-2}, \qquad r_{k+1} = \frac{q_{k+1}(p-1)}{p} = \frac{(r_k+1)n(p-1)}{p(n-2)}.$$

Dabei entspricht q_k der Norm auf der rechten Seite im k-ten Iterationsschritt. Wir erhalten per Induktion folgende Formel:

$$r_k = \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)}\right)^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{k-2} \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)}\right)^{k-1-\ell}.$$

Da $p < \frac{1}{2}n$, ist $\frac{n(p-1)}{p(n-2)} = 1 + \frac{2p-n}{p(n-2)} < 1$ und mit der Formel für die geometrische Reihe ergibt sich für den Grenzwert der monoton wachsenden r_k

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0 + \frac{1}{1 - \frac{n(p-1)}{p(n-2)}} - 1 = \frac{n(p-1)}{n-2p} = r_0$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} q_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(r_k+1)n}{n-2} = \frac{np}{n-2p} = m(p).$$

Aus (2.7) erhalten wir

$$\|u\|_{q_{k+1}}^{r_k+1} \le C\|f\|_p \|u\|_{q_k}^{r_k}. \tag{2.8}$$

Hier möchten wir nun den Grenzwert für $k \to \infty$ betrachten, wollen aber erst sichern, dass die sich dabei ergebenden Normen endlich sind. Es gilt

$$\|u\|_{q_{k+1}} \le c^{\frac{1}{r_k+1}} \|u\|_{q_k}^{\frac{r_k}{r_k+1}},$$

wobei $c = C\|f\|_p$. Durch iteriertes Einsetzen folgt

$$\|u\|_{q_{k+1}} \le c^{a_k} \|u\|_{q_1}^{b_k}, \tag{2.9}$$

wobei

$$b_1 = \frac{r_1}{r_1+1} = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{1}{r_1+1} = \frac{1}{2}$$

und

$$b_{k+1} = b_k \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}+1}, \qquad a_{k+1} = a_k \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}+1} + \frac{1}{r_{k+1}+1}.$$

Damit ergeben sich per Induktion folgende Formeln:

$$a_k = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{r_\ell + 1} \prod_{m=\ell+1}^{k} \frac{r_m}{r_m+1} \right) \text{ und } b_k = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{r_\ell}{r_\ell+1}.$$

Es ist sicher $b_k < 1$, insbesondere ist b_k beschränkt. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{r_m+1} \leq \frac{r_m}{r_m+1} < \frac{n(p-1)}{p(n-2)} < 1, \text{ da } r_m < \frac{n(p-1)}{n-2p}.$$

Also gilt für die einzelnen Summanden von a_k:

$$\frac{1}{r_\ell+1} \prod_{m=\ell+1}^{k} \frac{r_m}{r_m+1} < \frac{n(p-1)}{p(n-2)} \prod_{m=\ell+1}^{k} \frac{n(p-1)}{p(n-2)} = \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)} \right)^{k-\ell+1}.$$

Damit ist

$$a_k < \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)} \right)^{k-\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)} \right)^{\ell}$$

und wegen $\frac{n(p-1)}{p(n-2)} < 1$ ist

$$\limsup_{k\to\infty} a_k \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{n(p-1)}{p(n-2)} \right)^{\ell} < \infty.$$

Folglich ist die rechte Seite in (2.9) gleichmäßig in k beschränkt und mit $k \to \infty$ ergibt sich

$$\|u\|_{m(p)} < \infty,$$

also $u \in L^{m(p)}(\Omega)$. Lässt man nun in (2.8) $k \to \infty$ gehen, so erhält man

$$\|u\|_{m(p)}^{r_0+1} \leq C \|f\|_p \|u\|_{m(p)}^{r_0}$$

und somit

$$\|u\|_{m(p)} \leq C \|f\|_p.$$

$\square$

2.2. Beweis der Existenz von Lösungen

Nun wollen wir Satz 2.2 beweisen, der hier zur Erinnerung noch mal genannt wird.

Satz 2.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1 und $q > 1$ so, dass $|f(y)| \leq C|y|^q$ für große $|y|$. Weiterhin sei u_0 eine Lösung von*

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega_0, \ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0$$

in $L^\infty(\Omega_0) \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$, die nicht-degeneriert ist, d.h. die Gleichung

$$-\Delta h - f'(u_0)h = 0$$

hat nur die triviale Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$. Außerdem gelte $\Omega_k \to \Omega_0$ für $k \to \infty$ und $r > \frac{1}{2}nq$. Dann hat die Gleichung

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega_k, \ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega_k \tag{2.1}$$

für große k eine eindeutige Lösung $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega_k) \cap L^r(\Omega_k)$, die in $L^r(\tilde{B})$ nahe an u_0 ist, wobei $\tilde{B}$ ein beschränktes Gebiet ist sowie $\Omega_k \subset \tilde{B}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Darüber hinaus sind für hinreichend große k die u_k nicht-degenerierte Lösungen von (2.1).

Beweis. Der Beweis orientiert sich am Beweis von Theorem 1 aus [6], der für diesen Fall angepasst wird. Wir schreiben hier $\|.\|_{1,2}$ statt $\|.\|_{W_0^{1,2}}$ und $\|.\|_p$ statt $\|.\|_{L^p}$.

Schritt 1: Zunächst wird die Eindeutigkeit der u_k gezeigt.

Dazu seien u_k, v_k Lösungen von (2.1), sodass $u_k \neq v_k$ sowie $u_k \to u_0$ und $v_k \to u_0$ in $L^r(\tilde{B})$ für $k \to \infty$. Nach der Wachstumsvoraussetzung an f gilt mit $p_1 = \frac{r}{q} > \frac{n}{2}$

$$\int_{\tilde{B}} |f(u_k)|^{p_1} \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\tilde{B}} (1 + |u_k|^{p_1 q}) \,\mathrm{d}x = C \int_{\tilde{B}} (1 + |u|^r) \,\mathrm{d}x < \infty,$$

insbesondere ist also $f(u_k)$ in $L^{p_1}(\tilde{B})$. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der u_k in $L^r(\tilde{B})$ und Lemma 2.3 sind die u_k und v_k gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\tilde{B})$. Daraus folgt, dass $u_k \to u_0$ in $L^p(\tilde{B})$ für alle $1 \leq p < \infty$. Dies gilt auch für die v_k. Sei nun

$$t_k := \frac{u_k - v_k}{\|u_k - v_k\|_2}.$$

Dann ist $\|t_k\|_2 = 1$, $t_k \in W_0^{1,2}(\Omega_k)$ und nach dem Mittelwertwertsatz in Integralform

$$-\Delta t_k = \frac{f(u_k) - f(v_k)}{\|u_k - v_k\|_2} = \left(\int_0^1 f'\big((1-\tau)v_k + \tau u_k\big)\,\mathrm{d}\tau \right) t_k. \tag{2.10}$$

Da f' stetig ist, ist der Integrand auf der rechten Seite sicher messbar und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der u_k und v_k auch gleichmäßig beschränkt in L^∞. Also ist das Integral wohldefiniert. Wir schreiben

$$\theta_k(x) := \int_0^1 f'\big((1-\tau)v_k(x) + \tau u_k(x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Dann folgt, dass $|\theta_k(x)| \le C$ für alle k und alle $x \in \Omega_k$ sowie eine Konstante $C > 0$.

Außerdem gilt $\theta_k \to f'(u_0)$ in $L^p(\tilde{B})$ für alle $1 \le p < \infty$. Dafür reicht es zu zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge gibt, bzw. dass man aus jeder Teilfolge wieder eine Teilfolge auswählen kann, für die der Ausdruck konvergiert. Sei also $1 \le p < \infty$ beliebig. Da $u_k \to u_0$ in $L^p(\tilde{B})$, gilt nach dem Satz von Riesz-Fischer 1.2 nach Auswahl einer Teilfolge $u_k \to u_0$ p.w. fast überall (ebenso für v_k), insbesondere also $f'\big((1-\tau)v_k + \tau u_k\big) \to f'(u_0)$ für alle $\tau \in [0,1]$ und damit auch $\theta_k \to f'(u_0)$ p.w. fast überall. Damit folgt mit der Beschränktheit von $|\theta_k(x)|$ aus dem Satz von Lebesgue 1.3 die Konvergenz in $L^p(\tilde{B})$.

Es gilt nun

$$\|t_k\|_{1,2}^2 = \|\nabla t_k\|_2^2 \overset{(2.10)}{=} \int_{\Omega_k} \underbrace{\theta_k}_{|.|<C} t_k t_k \,\mathrm{d}x \le C\|t_k\|_2^2 \le C,$$

die t_k sind also gleichmäßig beschränkt in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$. Es gibt somit nach Satz 1.12 ein $t \in W_0^{1,2}(\tilde{B})$, sodass nach Auswahl einer Teilfolge $t_k \rightharpoonup t$ in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$ und $t_k \to t$ in $L^2(\tilde{B})$. Da $\|t_k\|_2 = 1$, ist auch $\|t\|_2 = 1$ und damit insbesondere $t \neq 0$. Wir zeigen nun, dass $t \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ und t eine Lösung von

$$-\Delta w = f'(u_0)w \tag{2.11}$$

in Ω_0 ist. Sei dazu zunächst $\phi \in C_0^\infty(\Omega_0 \setminus K)$ mit dem K aus Definition 2.1(i). Dann ist für große k auch $\phi \in C_0^\infty(\Omega_k)$, also

$$\int\limits_{\Omega_k} \nabla t_k \nabla \phi \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_k} \theta_k t_k \phi \,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Nun ist $t_k \rightharpoonup t$ in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$ und $t_k \to t$ in $L^2(\tilde{B})$. Da $\theta_k \to f'(u_0)$ in $L^p(\tilde{B})$ für alle $1 \leq p < \infty$, folgt

$$\begin{aligned} \|\theta_k t_k - f'(u_0)t\|_1 &\leq \|\theta_k(t_k - t)\|_1 + \|(\theta_k - f'(u_0))t\|_1 \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\|\theta_k\|_2}_{\leq C} \underbrace{\|t_k - t\|_2}_{\to 0} + \underbrace{\|\theta_k - f'(u_0)\|_2}_{\to 0} \underbrace{\|t\|_2}_{=1} \\ &\to 0, \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

also $\theta_k t_k \to f'(u_0)t$ in $L^1(\tilde{B})$ für $k \to \infty$. Nun können wir in (2.12) zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla t \nabla \phi \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_0} f'(u_0) t \phi \,\mathrm{d}x.$$

Da nach Lemma 1.26 die Menge der ϕ mit kompaktem Träger in $\Omega_0 \backslash K$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ liegt, zeigt dies die schwache Lösungseigenschaft auf ganz Ω_0.

Noch zu zeigen ist nun, dass $t \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ ist. Sei dazu $x_0 \in \tilde{B} \setminus (\bar{\Omega}_0 \cup E)$ (E wie in Definition 2.1(ii)). Dann ist $x_0 \notin U := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \bar{\Omega}_0 \cup E) < \frac{h}{2}\}$ für $h := \operatorname{dist}(x_0, \bar{\Omega}_0 \cup E)$, aber nach Definition 2.1(ii) ist $\Omega_k \subset U$ für große k. Für r hinreichend klein und große k ist also $\bar{B}_r(x_0) \cap \Omega_k = \emptyset$. Daher ist für große k und $x \in \bar{B}_r(x_0)$ $t_k(x) = 0$ und damit auch $t(x) = 0$ fast überall auf $\bar{B}_r(x_0)$ (aus $t_k \to t$ in $L^2(\tilde{B})$ folgt die punktweise Konvergenz f.ü. einer Teilfolge). Folglich ist $t(x) = 0$ fast überall auf $\tilde{B} \setminus (\bar{\Omega}_0 \cup E)$ und, da $\partial\Omega_0 \cup E$ eine Nullmenge ist, fast überall auf $\tilde{B} \setminus \Omega_0$. Außerdem ist Ω_0 glatt berandet und damit $t \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$. Also ist $t \neq 0$ eine schwache Lösung von (2.11) mit Nullrandbedingungen auf $\partial\Omega_0$. Dies widerspricht der Nicht-Degeneriertheit der Lösung u_0. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

Schritt 2: Wir zeigen die Existenz einer Lösung für hinreichend große k.

Definiere $i : W_0^{1,2}(\tilde{B}) \to W^{1,2}(\Omega_0)$ durch $i(u) = u|_{\Omega_0}$. Diese Abbildung ist sicher linear und stetig. Analog definiere $i_k : W_0^{1,2}(\tilde{B}) \to W^{1,2}(\Omega_k)$. Wir definieren eine stetige lineare

Abbildung $L : W^{-1,2}(\Omega_0) \to W_0^{1,2}(\tilde{B})$ wie folgt: Ist $g \in W^{-1,2}(\Omega_0)$, so ist $\bar{L}(g)$ die eindeutige schwache Lösung von $-\Delta u = g$ in Ω_0, $u = 0$ auf $\partial\Omega_0$. $L(g)$ ist dann definiert durch

$$L(g) = \begin{cases} \bar{L}(g)(x), & \text{falls } x \in \Omega_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definieren wir $A : W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B}) \to W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ durch

$$A(u) := L(f(i(u))).$$

Da $u \in L^r(\tilde{B})$ ist, ist $f(i(u)) \in L^{p_1}(\Omega_0)$ für $p_1 = \frac{r}{q} > \frac{n}{2}$ (vgl. *Schritt 1*) und damit $f(i(u)) \in W^{-1,2}(\Omega_0)$. Nach Lemma 2.3 ist außerdem $L(f(i(u))) \in L^\infty(\tilde{B})$ und damit in $L^r(\tilde{B})$, also ist A wohldefiniert. Als Verkettung stetiger Funktionen ist A auch stetig. Des Weiteren ist A kompakt. Sei dazu $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ beschränkt. Dann gibt es ein u, sodass nach Auswahl einer Teilfolge $u_\ell \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$, $u_\ell \to u$ in $L^p(\tilde{B})$ für $p < \frac{2n}{n-2}$ und $u_\ell \to u$ punktweise fast überall in $\tilde{B}$. Wie in *Schritt 1* zeigt man mit Lemma 2.3 die Beschränktheit in $L^\infty(\tilde{B})$ und damit die Konvergenz $f(i(u_\ell)) \to f(i(u))$ in $L^{\tilde{p}}(\Omega_0)$ für alle $1 \le \tilde{p} < \infty$. Da L stetig ist, folgt damit $A(u_\ell) \to A(u)$ in $W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$.

A_k wird analog definiert (mit L_k statt L und i_k statt i, wobei in der Definition von L einfach Ω_0 durch Ω_k ersetzt wird.).

Als nächstes zeigen wir, dass $A : W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B}) \to W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $A'(u)(\varphi) = L\big(f'(i(u))i(\varphi)\big)$ ist. Dazu sei o.B.d.A. $|f'(y)| \le C|y|^{q-1}$ für große $|y|$. (Für Lösungen u nahe u_0 in $L^r(\tilde{B})$ erhalten wir aus Lemma 2.3 eine gleichmäßige Schranke in $L^\infty(\tilde{B})$, die unabhängig von f ist, wenn $|f(y)| \le C_1 + C_2|y|^q$. Also werden die Lösungen nicht verändert, wenn f für große $|y|$ entsprechend modifiziert wird, denn die Wachstumsbedingung bleibt erhalten.)

Sei nun $u \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ beliebig. Dann ist $f'(i(u)) \in L^{p_2}(\Omega_0)$ für $p_2 = \frac{r}{q-1} > \frac{n}{2}$ und wegen $\frac{2p_2}{p_2-1} < \frac{2n}{n-2}$ gilt damit für $w \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} f'(i(u))i(\varphi)w \,\mathrm{d}x &\le \|f'(i(u))\|_{p_2}\|i(\varphi)w\|_{\frac{p_2}{p_2-1}} \\ &\le \|f'(i(u))\|_{p_2}\|\varphi\|_{\frac{2p_2}{p_2-1}}\|w\|_{\frac{2p_2}{p_2-1}} \\ &\le C\|\varphi\|_{1,2}\|w\|_{1,2} \le C\|w\|_{1,2}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $f'(i(u))\cdot i(\varphi) \in W^{-1,2}(\Omega_0)$. Somit ist $L\big(f'(i(u))\cdot i(\varphi)\big)$ wohldefiniert und nach Lemma 2.3 in $L^r(\tilde{B})$. Außerdem ist für $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ die Abbildung $\varphi \mapsto f'(i(u))i(\varphi)$ sicher stetig und linear und damit auch $A'(u) : \varphi \mapsto L\big(f'(i(u))i(\varphi)\big)$ (wegen der Linearität von L). Sei

$$r(\varphi) := A(u+\varphi) - A(u) - A'(u)(\varphi) = L\big(\underbrace{f(i(u+\varphi)) - f(i(u)) - f'(i(u))i(\varphi)}_{=:\tilde{r}(\varphi)}\big)$$

Zu zeigen ist jetzt, dass

$$\lim_{\|\varphi\|_* \to 0} \frac{\|r(\varphi)\|_*}{\|\varphi\|_*} = 0,$$

wobei $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ und $\|\varphi\|_* := \max(\|\varphi\|_{1,2}, \|\varphi\|_r)$. Es reicht wiederum zu zeigen, dass man aus jeder beliebigen Folge $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit den gewünschten Eigenschaften auswählen kann. Mit dem Mittelwertsatz in Integralform sieht man zunächst für beliebiges $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$:

$$\begin{aligned}
\|r(\varphi)\|_{1,2}^2 = \|L(\tilde{r}(\varphi))\|_{1,2}^2 &= \int_{\tilde{B}} L\big(\tilde{r}(\varphi)\big)\tilde{r}(\varphi)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{B}} r(\varphi)\big(f(i(u+\varphi)) - f(i(u)) - f'(i(u))i(\varphi)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{B}} r(\varphi)\Bigg(\int_0^1 f'(i(u)+ti(\varphi))i(\varphi)\,\mathrm{d}t - f'(i(u))i(\varphi)\Bigg)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{B}} r(\varphi)\Bigg(\int_0^1 \big(f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\big)\,\mathrm{d}t \cdot i(\varphi)\Bigg)\,\mathrm{d}x \\
&\le \|r(\varphi)\|_{\frac{2p_2}{p_2-1}} \|\varphi\|_{\frac{2p_2}{p_2-1}} \left(\int_{\tilde{B}}\int_0^1 \big|f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\big|^{p_2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\le \|r(\varphi)\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2} \left(\int_{\tilde{B}}\int_0^1 \big|f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\big|^{p_2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}},
\end{aligned}$$

da $\frac{2p_2}{p_2-1} < \frac{2n}{n-2}$.

Also ist

$$\frac{\|r(\varphi)\|_{1,2}}{\|\varphi\|_*} \leq \frac{\|r(\varphi)\|_{1,2}}{\|\varphi\|_{1,2}} \leq \left(\int_{\tilde{B}} \int_0^1 \left| f'(i(u) + ti(\varphi)) - f'(i(u)) \right|^{p_2} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_2}}. \tag{2.13}$$

Außerdem gilt für $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$, dass $f(i(u+\varphi))$, $f(i(u)) \in L^{p_1}(\bar{B})$ und $f'(i(u)) \in L^{p_2}(\bar{B})$ und damit $(p_2 > p_1)$

$$\|f'(i(u))i(\varphi)\|_{p_1} \leq \|f'(i(u))\|_{p_2} \|\varphi\|_{\frac{p_2}{p_2-p_1}} \leq \|f'(i(u))\|_{p_2} \|\varphi\|_r < \infty,$$

da $\frac{p_2}{p_2-p_1} = q < \frac{2r}{n} < r$. Also ist $\tilde{r}(\varphi) \in L^{p_1}(\tilde{B})$ und damit

$$\|r(\varphi)\|_r^r = \|L(\tilde{r}(\varphi))\|_r^r = \int_{\tilde{B}} |L(\tilde{r}(\varphi))|^r \, \mathrm{d}x \leq C \|L(\tilde{r}(\varphi))\|_\infty^r \overset{2.3}{\leq} C \|\tilde{r}(\varphi)\|_{p_1}^r,$$

da $p_1 > \frac{n}{2}$. Folglich ist

$$\|r(\varphi)\|_r \leq C \|\tilde{r}(\varphi)\|_{p_1}.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\|\tilde{r}(\varphi)\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\tilde{B}} |f(i(u+\varphi)) - f(i(u)) - f'(i(u))i(\varphi)|^{p_1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{B}} \left| \int_0^1 \big(f'(i(u) + ti(\varphi))\big) i(\varphi) \, \mathrm{d}t - f'(i(u))i(\varphi) \right|^{p_1} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{B}} \left| \int_0^1 \big(f'(i(u) + ti(\varphi)) - f'(i(u))\big) i(\varphi) \, \mathrm{d}t \right|^{p_1} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\tilde{B}} \int_0^1 |f'(i(u) + ti(\varphi)) - f'(i(u))|^{p_1} |i(\varphi)|^{p_1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\tilde{B}} \int_0^1 \left| f'(i(u) + ti(\varphi)) - f'(i(u)) \right|^{\frac{rp_1}{r-p_1}} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{r-p_1}{r}} \|\varphi\|_r^{p_1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\tilde r(\varphi)\|_{p_1} \le \left(\int\limits_{\tilde B} \int\limits_0^1 \left|f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\right|^{p_2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \right)^{p_2} \|\varphi\|_r,$$

da $\frac{rp_1}{r-p_1} = p_2$. Also ist

$$\frac{\|r(\varphi)\|_r}{\|\varphi\|_*} \le \frac{\|r(\varphi)\|_r}{\|\varphi\|_r} \le \left(\int\limits_{\tilde B} \int\limits_0^1 \left|f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\right|^{p_2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_2}}. \tag{2.14}$$

Aus (2.13) und (2.14) ergibt sich insgesamt

$$\frac{\|r(\varphi)\|_*}{\|\varphi\|_*} \le \left(\int\limits_{\tilde B} \int\limits_0^1 \left|f'(i(u)+ti(\varphi)) - f'(i(u))\right|^{p_2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Zu zeigen ist noch, dass die rechte Seite gegen 0 konvergiert, wenn $\|\varphi\|_*$ gegen 0 konvergiert. Sei dazu $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $W_0^{1,2}(\tilde B) \cap L^r(\tilde B)$. Dann konvergiert der Integrand p.w. fast überall gegen 0. Außerdem ist das Integral auf $\tilde B \times [0,1]$ bzgl.

$$(t,x) \mapsto \left|f'(i(u)+ti(\varphi_\ell)) - f'(i(u))\right|^{p_2}$$

gleichgradig absolutstetig. Dazu sei $D \subset \tilde B \times [0,1]$ messbar mit $|D|$ klein. Dann ist wegen der Wachstumsbedingung an f'

$$\iint\limits_D \left|f'(i(u)+ti(\varphi_\ell)) - f'(i(u))\right|^{p_2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \le C \iint\limits_D \big(1 + |u|^r + |\varphi_\ell|^r\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

wenn $|D| < \delta = \delta(\varepsilon)$, denn für große ℓ wird $\|\varphi_\ell\|_r$ beliebig klein, für die anderen Terme folgt die Behauptung aus der Absolutstetigkeit des Integrals bei festen Integranden. Also ist A Fréchet-differenzierbar mit $A'(u)(\varphi) = L\big(f'(i(u))i(\varphi)\big)$.

Da das Bild von A in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ liegt, sind Fixpunkte von A ebenfalls in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ und damit schwache Lösungen von (2.1) (mit Ω_0 statt Ω_k). Insbesondere ist u_0 ein Fixpunkt von A, sogar ein isolierter Fixpunkt (sonst könnte man ähnlich wie in *Schritt 1* einen Widerspruch zur Nicht-Degeneriertheit konstruieren). Betrachte nun $I - A'(u_0)$. Da das

Bild von $A'(u_0)$ in $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ liegt (wegen der Definition von L), ist auch $\ker(I - A'(u_0))$ eine Teilmenge von $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ (da die Elemente des Kerns Fixpunkte von $A'(u_0)$ sind). $A'(u_0)(\varphi)$ ist Lösung von $-\Delta v = f'(u_0)\varphi$ in Ω_0 mit Nullrandwerten. Wählt man nun $\varphi \in \ker(I - A'(u_0))$, so ist

$$0 = (I - A'(u_0))\varphi = \varphi - A'(u_0)(\varphi),$$

d.h. φ ist Lösung von $-\Delta v = f'(u_0)\varphi$, also $-\Delta\varphi - f'(u_0)\varphi = 0$. Wegen der Nicht-Degeneriertheit der Lösung u_0 muss dann $\varphi = 0$ sein, also ist $I - A'(u_0)$ injektiv. Insbesondere ist 1 kein Eigenwert von $A'(u_0)$. Dann ist nach Satz 1.21 $\operatorname{ind}(I - A, u_0) = \pm 1$.

Wähle nun $\delta > 0$, sodass $u \neq A(u)$ für alle $u \in L^r(\tilde{B}) \cap W_0^{1,2}(\tilde{B})$ mit $\|u - u_0\|_r \leq \delta$ und $u \neq u_0$ ist. Wir zeigen, dass für hinreichend großes k gilt:

$$u \neq tA(u) + (1-t)A_k(u) \text{ für } 0 \leq t \leq 1,\ u \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B}) \text{ und } \|u - u_0\|_r = \delta.$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann existieren $0 \leq t_k \leq 1$ und $u_k \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ mit $\|u_k - u_0\|_r = \delta$ und

$$u_k = t_k A(u_k) + (1 - t_k)A_k(u_k). \tag{2.15}$$

Aus Lemma 2.3 folgt wie in *Schritt 1* die gleichmäßige Beschränktheit der u_k in $L^\infty(\tilde{B})$ und wegen der Lösungseigenschaft (2.15) auch in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$. Also finden wir wegen der gleichmäßigen Beschränktheit in $W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$ eine Teilfolge, die schwach in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$ und $L^r(\tilde{B})$ gegen $v \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$, stark in $L^p(\tilde{B})$ für $p < \frac{2n}{n-2}$ und punktweise fast überall konvergiert. Da die u_k gleichmäßig in $L^\infty(\tilde{B})$ beschränkt sind, ist wegen der punktweisen Konvergenz auch $v \in L^\infty(\tilde{B})$. Deshalb konvergiert u_k in $L^r(\tilde{B})$ stark gegen v, insbesondere gilt $\|v - u_0\|_r = \delta$.

Sei nun $T \subset\subset \Omega_0 \setminus K$, dann ist nach Definition 2.1 auch $T \subset \Omega_k$ für große k. Wegen (2.15) gilt also für große k mit $\phi \in C_0^\infty(T)$

$$\int_T \nabla u_k \nabla \phi \,\mathrm{d}x = \int_T f(u_k)\phi \,\mathrm{d}x,$$

da $-\Delta A(u) = f(u)$ in Ω_0 und $-\Delta A_k(u) = f(u)$ in Ω_k. Geht man nun zum Grenzwert über, so erhält man

$$\int_T \nabla v \nabla \phi \,\mathrm{d}x = \int_T f(v)\phi \,\mathrm{d}x,$$

also ist v schwache Lösung von $-\Delta v = f(v)$ in T und wegen Lemma 1.26 auch in Ω_0.

Nun zeigen wir noch, dass $v \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ ist. Sei dazu U eine offene Umgebung von $\bar{\Omega}_0 \cup E$ (das E ist wiederum aus Definition 2.1). Es ist sicher $\Omega_0 \subset U$ und für hinreichend große k auch $\Omega_k \subset U$. Nach Definition von A und A_k gilt außerdem für alle $u \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B})$, dass $tA(u)(x) + (1-t)A_k(u)(x) = 0$ für $x \notin \bar{\Omega}_0 \cup \Omega_k$. Somit ist $u_k(x) = 0$ für große k und $x \notin U$. Also ist auch $v(x) = 0$ für fast alle $x \notin U$ und damit (da U beliebig) fast überall in $\tilde{B} \setminus (\bar{\Omega}_0 \cup E)$. Da $\partial\Omega_0 \cup E$ eine Nullmenge ist, ist $v(x) = 0$ fast überall in $\tilde{B} \setminus \Omega_0$. Daraus folgt wiederum $v \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ und damit $v = A(v)$ nach Definition von A. Dies widerspricht der Wahl von δ, und damit ist die Behauptung gezeigt.

Um den Beweis der Existenz der u_k für große k zu beenden, betrachten wir

$$B_\delta := \{u \in W_0^{1,2}(\tilde{B}) \cap L^r(\tilde{B}) \ : \ \|u - u_0\|_r \leq \delta\}.$$

Wegen der Homotopie-Eigenschaft 1.18 und dem eben gezeigten gilt

$$\deg(I - A_k, B_\delta, 0) = \deg(I - A, B_\delta, 0) = \mathrm{ind}(I - A, u_0) = \pm 1.$$

Also ist $\deg(I - A_k, B_\delta, 0) \neq 0$ für große k und nach 1.20 existiert ein u_k nahe u_0 (d.h. $\|u_k - u_0\|_r < \delta$), sodass $u_k = A_k(u_k)$. Damit ist die Existenz bewiesen.

Schritt 3: Wir zeigen die Nicht-Degeneriertheit der Lösungen u_k für große k.

Dabei wird ähnlich vorgegangen wie in *Schritt 1*. Angenommen, wir finden für alle k_0 ein $k \geq k_0$ und ein $v_k \in W_0^{1,2}(\Omega_k)$, $v_k \neq 0$, sodass

$$-\Delta v_k - f'(u_k) v_k = 0.$$

O.B.d.A. sei $\|v_k\|_2 = 1$. Wie in *Schritt 1* (für u_k statt θ_k) kann man zeigen, dass $|f'(u_k(x))| \leq C$ für alle k und für alle $x \in \Omega_k$, und dass $f'(u_k) \to f'(u_0)$ in $L^p(\tilde{B})$ für alle $1 \leq p < \infty$. Daraus folgt, dass $\|v_k\|_{1,2}$ gleichmäßig beschränkt ist, es also ein $v \in W_0^{1,2}(\tilde{B})$ gibt, sodass nach Auswahl einer Teilfolge $v_k \rightharpoonup v$ in $W_0^{1,2}(\tilde{B})$ und $v_k \to v$ in $L^2(\tilde{B})$. Insbesondere ist $\|v\|_2 = 1$. Wiederum wie in *Schritt 1* folgert man daraus, dass $v \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ eine schwache Lösung von $-\Delta h - f'(u_0)h = 0$ auf Ω_0 mit Nullrandwerten ist, was der Nicht-Degeneriertheit der Lösung u_0 widerspricht. Also müssen auch die Lösungen u_k für große k nicht-degeneriert sein.

$\square$

Wenn u_0 in Ω_0 nichtnegativ ist, so wäre es natürlich gut zu wissen, ob auch die u_k für große k nichtnegativ in Ω_k sind. Ist $f \geq 0$, wie in unserem Fall, so kann man die Nichtnegativität direkt aus dem Maximumprinzip folgern (vgl. Abschnitt 3.2). Ansonsten kann man für nichtnegative Lösungen folgenden Satz zeigen:

Satz 2.4. *Sei Ω^s die Vereinung der Komponenten von Ω_0, auf denen u_0 identisch verschwindet, und sei λ_s der erste (schwache) Eigenwert von*

$$-\Delta h = \lambda h \text{ in } \Omega^s, \;\; h = 0 \text{ auf } \partial\Omega^s.$$

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2, außerdem sei $f(0) \geq 0$ und u_0 nichtnegativ in Ω_0, aber nicht identisch 0.

(i) Ist $f(0) > 0$ oder $u_0(x) > 0$ in Ω_0 oder $f'(0) < \lambda_s$, dann ist u_k nichtnegativ in Ω_k für alle großen k.

(ii) Ist $f(0) = 0$ und $f'(0) > \lambda_s$, dann wechselt u_k in Ω_k das Vorzeichen für alle großen k.

Beweis. vgl. [6, Theorem 2].

□

3. Konstruktion des Beispielgebiets

In diesem Kapitel wird nun nach der Vorgehensweise von Dancer in [5] ein Gebiet konstruiert, das homöomorph zur Einheitskugel ist und für das die Gleichung (0.1) eine positive nicht-degenerierte Lösung besitzt. Dazu wird ein Annulus so deformiert, dass es in dem entstehenden Gebiet eine nicht-degenerierte positive Lösung gibt. Dann schneiden wir in dieses Gebiet ein „Loch" und zeigen mit Hilfe von Satz 2.2, dass auch auf dem resultierenden Gebiet eine positive nicht-degenerierte Lösung existiert, wenn das „Loch" hinreichend klein ist. Abbildung 1 verdeutlicht dieses Vorgehen. Dabei sind die Skizzen zur besseren Anschaulichkeit im zweidimensionalen gezeichnet, obwohl wir im Folgenden die Dimension $n > 2$ voraussetzen.

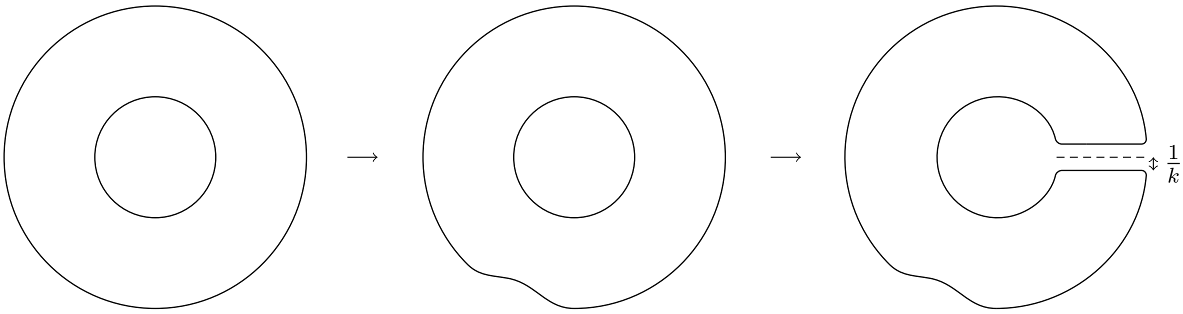

Abbildung 1: Vorgehen bei der Konstruktion des Beispielgebiets

Wir betrachten nun für $n > 2$ und $0 < R_1 < R_2$ den Annulus

$$\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ R_1 < \|x\| < R_2\}.$$

Des Weiteren sei $f(y) := |y|^{\frac{n+2}{n-2}}$.

3.1. Der Transversalitätssatz und ein Generizitätsresultat

Als erstes zeigen wir folgendes Lemma, das die Existenz nicht-degenerierter Lösungen sichert. Dabei orientieren wir uns am Vorgehen von Saut und Temam in Kapitel 4 von [24].

Lemma 3.1. *Es existieren Gebiete $\tilde{A}_\theta$, die C^2-nah an $\tilde{A}$ sind und für die die Gleichung* (0.1) *in $W_0^{1,p} \cap W^{2,p}$ nur nicht-degenerierte Lösungen hat. Wir sagen, dass $\tilde{A}_\theta$ C^2*-nah an $\tilde{A}$ *ist, wenn es einen C^2-Diffeomorphismus $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit beschränktem Träger* *gibt, dessen C^2-Norm kleiner als ein beliebiges ε ist, sodass $\tilde{A}_\theta = (I+\theta)(\tilde{A})$, wobei I die Identitätsabbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.*

Für den Beweis wird eine unendlich-dimensionale Version des Transversalitätssatzes verwendet, die so in [24, Thm. 1.1] zu finden ist.

Satz 3.2. (Transversalitätssatz)
Seien X, Y, Z reelle Banachräume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offene Teilmengen. Weiterhin sei $F : U \times V \to Z$ eine C^k-Abbildung, sodass

für alle $(x_0, y_0) \in U \times V$ gilt: $F'_x(x_0, y_0) : X \to Z$ ist ein linearer Fredholm-Operator vom Index $l < k$. (3.1)

Es sei

z_0 ein regulärer Wert von F, d.h. das totale Differential F' mit

$$F'(x_0, y_0).(x, y) = F'_x(x_0, y_0).x + F'_y(x_0, y_0).y \tag{3.2}$$

ist surjektiv an jedem Punkt (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = z_0$.

Außerdem gelte:

Die Menge aller $x \in U$ mit $F(x, y) = z_0$, wobei y aus einer kompakten Teilmenge von Y ist, ist relativ kompakt in U. (3.3)

Dann ist die Menge

$$\mathcal{O} := \{y \in V : z_0 \text{ ist ein regulärer Wert von } F(., y)\}$$

eine dichte offene Teilmenge von V.

Bemerkung 3.3. Sind X, Y, Z separabel, so gilt die Behauptung auch ohne Bedingung (3.3), wobei die Menge $\mathcal{O}$ dann keine offene dichte, sondern eine residuelle Menge ist, d.h. ihr Komplement ist mager, ist also die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Teilmengen von V (vgl. [24, Bem. A.1] oder [15, S. 63]).

Außerdem kann Bedingung (3.2) durch folgende Variante ersetzt werden:

Satz 3.4. *Es gelten* (3.1) *und* (3.3) *aus Satz 3.2. Statt* (3.2) *nehmen wir für gegebenes* z_0 *an, dass für alle* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *mit* $F(x_0, y_0) = z_0$ *und* $L = F'_x(x_0, y_0)$ *gilt:*

$$\textit{Ist } w \in \ker(L') \textit{ und } \left\langle F'_y(x_0, y_0).y, w \right\rangle = 0 \textit{für alle } y \in Y, \textit{ dann ist } w = 0. \tag{3.4}$$

Dann gilt (3.2) *und die Schlussfolgerung aus Satz 3.2.*

Beweis. Siehe auch [24, Thm. 1.2]. Zu zeigen ist, dass z_0 ein regulärer Wert von F ist, d.h. zu $(x_0, y_0) \in F^{-1}(\{z_0\})$ und $h \in Z$ ist ein $(x, y) \in X \times Y$ zu finden mit

$$F'_x(x_0, y_0).x + F'_y(x_0, y_0).y = h.$$

Mit $L = F'_x(x_0, y_0)$ ergibt sich als Gleichung

$$Lx = h - F'_y(x_0, y_0).y.$$

Da L ein linearer Fredholm-Operator ist, ist sein Bild abgeschlossen. Daher ist obige Gleichung laut Satz 1.16 genau dann für x lösbar, wenn $h - F'_y(x_0, y_0).y \in \ker(L')^\perp$ ist, d.h. wenn

$$\langle h - F'_y(x_0, y_0).y, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in \ker(L').$$

Sei $\{w_1, \dots, w_N\}$ eine Basis von $\ker(L')$, der endliche Dimension hat, da L ein Fredholm-Operator ist. Wir wollen nun $y \in Y$ finden, sodass

$$\mathscr{L}_i(y) = \langle h, w_i\rangle \text{ für } i = 1, \dots, N,$$

wobei $\mathscr{L}_i \in Y'$ das durch

$$\mathscr{L}_i(y) = \langle F'_y(x_0, y_0).y, w_i\rangle,\ i = 1, \dots, N$$

definierte lineare stetige Funktional auf Y ist. Nach einem Korollar des Hahn-Banach-Theorems in [25] existiert ein solches y, wenn die $\mathscr{L}_i$ linear unabhängig sind, d.h. wenn für $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ und

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathscr{L}_i$$

aus $\mathscr{L}(y) = 0$ für alle $y \in Y$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$ ist.

Sei

$$w = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i w_i \in \ker(L').$$

Dann ist

$$\mathscr{L}(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathscr{L}_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle F'_y(x_0, y_0).y, w_i \rangle = \langle F'_y(x_0, y_0).y, w \rangle$$

und die Bedingung ist äquivalent zur Voraussetzung (3.4).

□

Bemerkung 3.5. Die Bestimmung des dualen Operators von $F'_x(x_0, y_0)$ und der Nachweis von (3.4) sind generell einfacher in Hilberträumen. Seien also $X \hookrightarrow \tilde{X}$, $Z \hookrightarrow \tilde{Z}$ stetige Einbettungen in die Hilberträume $\tilde{X}, \tilde{Z}$. Der Operator $L = F'_x(x_0, y_0)$ habe eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{L}$ als linearer stetiger Operator von $\tilde{X}$ nach $\tilde{Z}$, wobei $(\tilde{L})^{-1}(Z) \subset X$. Dann kann (3.4) ersetzt werden durch:

$$\text{Ist } w \in \ker(\tilde{L}^*) \text{ und } \langle F'_y(x_0, y_0).y, w \rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y, \text{ dann ist } w = 0. \tag{3.5}$$

Beweis. Der Beweis wird genauso geführt wie der zu Satz 3.4 (siehe auch [24, Bem. 1.1]).

□

Beweis von Lemma 3.1. Der Beweis ist angelehnt an das Vorgehen in [24, Section 4], wobei einige Teile eine genauere Überarbeitung benötigten.

Wir betrachten das allgemeinere nichtlineare elliptische Problem

$$-\Delta u + g(x, u) = 0 \text{ in } \Omega, \; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \tag{3.6}$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet der Klasse C^2 im $\mathbb{R}^n$ und g eine reelle stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist, für die $g(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Wir betrachten dabei solche Ω, die das Bild von $\Omega_0 := \tilde{A}$ unter einem Diffeomorphismus nahe der Identität I sind. Genauer sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\bar{\Omega}_0 \subset Q$, und sei $T = I + \theta \in C^2(\bar{Q}; \mathbb{R}^n)$ mit $\theta \in C_0^2(Q; \mathbb{R}^n)$. Ist θ klein genug, d.h.

$$\|\theta\|_{C^2} < c_n \tag{3.7}$$

für ein klein gewähltes $0 < c_n < \frac{1}{2n}$, so gilt für die Jacobi-Determinante von T

$$\det T' = \det(I + \theta)' > \varepsilon_0 > 0 \tag{3.8}$$

für ein $\varepsilon_0 > 0$ und T ist nach dem Satz der inversen Abbildung [3, Thm. 3.1.1] ein lokaler Diffeomorphismus auf Q. Außerdem gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lokal

$$\theta(x) - \theta(y) = \int_0^1 \theta'(tx + (1-t)y)\,\mathrm{d}t \cdot (x - y),$$

also

$$|\theta(x) - \theta(y)| \leq \max_{x\in Q} \underbrace{\|\theta'(x)\|_F}_{\leq nc_n} |x - y| \leq n\frac{1}{2n}|x - y| = \frac{1}{2}|x - y|,$$

wobei $\|.\|_F$ die Frobenius-Norm bezeichnet. Demnach ist θ auf $\bar{Q}$ lokal und, da $\bar{Q}$ kompakt ist, auch global Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2}$. Damit gilt für beliebige $x, y \in \bar{Q}$

$$|x + \theta(x) - (y + \theta(y))| \geq |x - y| - |\theta(x) - \theta(y)| \geq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Aus $x + \theta(x) = y + \theta(y)$ folgt also, dass $x = y$. T ist folglich injektiv und damit ein Diffeomorphismus auf $\bar{Q}$. Insbesondere ist $T\Omega_0$ eine offene Menge Ω, und $T(\partial\Omega_0)$ ist genau der Rand von Ω. Im Folgenden werden wir nur solche Ω betrachten.

Wir wollen Satz 3.4 anwenden. Sei dazu $p > n$, sodass laut [12, Thm. 7.26] die Einbettung $W^{2,p}(\Omega_0) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}_0)$ stetig ist. Dann setzen wir

$$\begin{aligned}
&X := W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap W^{2,p}(\Omega_0),\ U := X \setminus \{0\},\\
&Y := C^2(\bar{Q}; \mathbb{R}^n),\ V := \{\theta \in C_0^2(Q; \mathbb{R}^n) : \theta \text{ erfüllt (3.7) und (3.8)}\},\\
&Z := L^p(\Omega_0).
\end{aligned}$$

Für $\theta \in V$ und $\Omega = (I + \theta)\Omega_0$ betrachten wir das Randwertproblem (3.6) und wollen dieses auf ein Randwertproblem für Ω_0 zurückführen. Für $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ ist sicher $v := u \circ T \in X$. Umgekehrt ist für $v \in X$ auch $u = v \circ T^{-1} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. Setzt man also $v \circ T^{-1}$ in (3.6) ein, multipliziert beide Seiten mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriert, so erhält man durch Anwenden der Kettenregel und der Transformationsformel:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (-\Delta_x u + g(x,u))\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \nabla_x u \cdot (\nabla_x \varphi)^{\top} + g(x,u)\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \nabla_x (v \circ T^{-1}) \cdot (\nabla_x \varphi)^{\top} + g(x, v \circ T^{-1})\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \nabla_{\tilde{x}} v(T^{-1}x) \cdot (T')^{-1} \cdot (\nabla_x \varphi)^{\top} + g(x, v \circ T^{-1})\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_0} (\det T')(\nabla_{\tilde{x}} v \cdot (T')^{-1} \cdot (\nabla_x \varphi)^{\top}(T\tilde{x}) + g(T\tilde{x}, v)\varphi(T\tilde{x}))\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\Omega_0} (\det T')\nabla_{\tilde{x}} v \cdot (T')^{-1} \cdot (T'^{\top})^{-1} \cdot (\nabla_{\tilde{x}} \psi)^{\top} + (\det T') g(T\tilde{x}, v)\psi \,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\Omega_0} [-\operatorname{div}_{\tilde{x}}\{(\det T')\nabla_{\tilde{x}} v \cdot (T')^{-1}(T'^{\top})^{-1}\} + (\det T') g(T\tilde{x}, v)]\psi \,\mathrm{d}\tilde{x}
\end{aligned}$$

Dabei ist x ein allgemeiner Punkt in Ω sowie $\tilde{x}$ ein allgemeiner Punkt in Ω_0, $\operatorname{div}_{\tilde{x}}$ und $\nabla_{\tilde{x}}$ bedeutet, dass diese Operatoren bzgl. der Variable $\tilde{x}$ anzuwenden sind, und $\psi = \varphi \circ T \in C_0^{\infty}(\Omega_0)$. Damit ergibt sich folgendes zu (3.6) äquivalentes Problem:

$$\begin{aligned}
&v \in X \text{ und} \\
&F(v,\theta)(\tilde{x}) = 0 \text{ für alle } \tilde{x} \in \Omega_0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei

$$F(v,\theta) = -\operatorname{div}_{\tilde{x}}\{(\det T')\nabla_{\tilde{x}} v \cdot (T')^{-1}(T'^{\top})^{-1}\} + g(T\tilde{x}, v) \cdot \det T'.$$

Da $p > n$ ist, gilt für $v \in X$ auch $v \in C^1(\bar{\Omega}_0)$. Insbesondere ist v in $\bar{\Omega}_0$ beschränkt und damit auch $g(T\tilde{x}, v)$. Da Ω_0 beschränkt ist, ist folglich $g(T\tilde{x}, v) \in L^p(\Omega_0)$. Also ist $F : U \times V \to Z$ wohldefiniert. Die Lemmata 4.2, 4.3 und 4.5 aus [21] zeigen, dass F bzgl. θ stetig differenzierbar ist. Sicher ist F auch bzgl. v differenzierbar und F'_v ist stetig. Also ist F nach [8, Satz 8.9.1] in C^1.

Anstatt F'_v und F'_θ an jedem Punkt $(v^0, \theta^0) \in U \times V$ anzugeben, reicht es, $F'_v(v^0, 0)$ und $F'_\theta(v^0, 0)$ zu bestimmen, da wir immer formell Ω_0 ändern können, sodass o.B.d.A.

$\theta^0 = 0$ ist. Für F'_v gilt mit $v \in X$

$$F'_v(v^0, 0).v = -\Delta v + \frac{\partial g}{\partial u}(x, v^0).v.$$

Zur Bestimmung von F'_θ benötigen wir die oben genannten Lemmata aus [21]. Lemma 4.2 aus [21] besagt, dass für $\zeta, \theta \in Y$ und $T = I + \theta$ gilt:

$$\frac{\partial |\det T'|}{\partial T}(T).\zeta = \{(\operatorname{div}(\zeta \circ T^{-1})) \circ T\} |\det T'|.$$

Laut [21, Lemma 4.3] gilt

$$\frac{\partial (T')^{-1}}{\partial T}(T).\zeta = -(T')^{-1} \cdot \zeta' \cdot (T')^{-1}.$$

Außerdem ist nach [21, Lemma 4.5] für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{\partial ((f \circ T) |\det T'|)}{\partial T}(T).\zeta = \{(\operatorname{div}(f \cdot (\zeta \circ T^{-1}))) \circ T\} |\det T'|.$$

Damit ergibt sich für $F'_\theta(v^0, 0)$ mit $\zeta \in Y$

$$\begin{aligned} F'_\theta(v^0, 0).\zeta = & -\operatorname{div}(\operatorname{div}(\zeta) \nabla v^0) + \operatorname{div}(\nabla v^0 \cdot (\zeta'^\top + \zeta')) \\ & + g(x, v^0) \operatorname{div}(\zeta) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, v^0) \zeta_i. \end{aligned}$$

Nun gilt es, die Voraussetzungen von Satz 3.4 zu prüfen. Da X, Y und Z separabel sind (vgl. Bemerkung 1.9), reicht es nach Bemerkung 3.3, die Bedingungen (3.1) und (3.4) zu überprüfen.

Nachweis von (3.1):

Nach [12, Thm. 9.15] ist $-\Delta$ ein Isomorphismus von X nach Z und damit insbesondere ein Fredholm-Operator mit Index 0. Außerdem ist $v \mapsto \frac{\partial g}{\partial u}(x, v^0)v$ ein kompakter Operator von X nach Z, da nach Satz 1.12 die Einbettung von X nach Z kompakt ist und $\frac{\partial g}{\partial u}(x, v^0)$ beschränkt ist. Nach Lemma 1.15 ist also $F'_v(v^0, 0)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Nachweis von (3.4):

Für $u^0 \in U$ gelte $F(u^0, 0) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} -\Delta u^0 + g(x, u^0) &= 0 \text{ in } \Omega_0, \\ u^0 &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_0. \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 3.5 wollen wir (3.5) überprüfen. Dazu seien

$$\begin{aligned} \tilde{X} &:= W_0^{1,2}(\Omega_0) \cap W^{2,2}(\Omega_0), \\ \tilde{Z} &:= L^2(\Omega_0). \end{aligned}$$

Laut Satz 1.12 sind die Einbettungen $X \hookrightarrow \tilde{X}$ und $Z \hookrightarrow \tilde{Z}$ stetig. $L := F'_v(u^0, 0)$ hat eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{L} : \tilde{X} \to \tilde{Z}$ als linearer stetiger Operator, da für $v \in \tilde{X}$ sicher gilt, dass

$$-\Delta v + \frac{\partial g}{\partial u}(x, u^0)v \in L^2(\Omega_0).$$

Außerdem ist $(\tilde{L})^{-1}(Z) \subset X$, denn ist $v \in \tilde{X}$ mit $\tilde{L}v = h$ für $h \in Z = L^p(\Omega_0)$, so ist $v \in X$ nach [17, Section 3, Thm. 15.1]. Damit sind die Voraussetzungen von Bemerkung 3.5 erfüllt.

Nun bedeutet $w \in \ker \tilde{L}^*$, dass $w \in L^2(\Omega_0)$ ist und für alle $\varphi \in \tilde{X}$

$$\int_{\Omega_0} w(-\Delta\varphi + \frac{\partial g}{\partial u}(x, u^0)\varphi) \, \mathrm{d}x = 0$$

erfüllt. Nach Resultaten aus der elliptischen Regularitätstheorie (siehe z.B. [1, Section 15]) folgt daraus, dass $w \in W^{2,2}(\Omega_0) \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$ ist und damit

$$\begin{aligned} -\Delta w + \frac{\partial g}{\partial u}(x, u^0)w &= 0 \text{ in } \Omega_0, \\ w &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gilt.

Nun ist zu zeigen: erfüllt $w \in W_0^{1,2}(\Omega_0) \cap W^{2,2}(\Omega_0)$ die Bedingungen (3.10) und $\langle F'_\theta(u^0, 0).\zeta, w \rangle = 0$ für alle $\zeta \in C^2(Q; \mathbb{R}^n)$, dann ist $w = 0$.

Dazu rechnet man zunächst für $u \in C^3(\Omega_0)$ leicht nach, dass

$$-\operatorname{div}((\operatorname{div}\zeta)\nabla u) + \operatorname{div}(\nabla u(\zeta'^{\top} + \zeta')) = -\operatorname{div}[\zeta(\Delta u)] + \Delta(\nabla u \cdot \zeta)$$

und

$$g(x,u)\operatorname{div}\zeta + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,u)\zeta_i = \operatorname{div}(g(x,u)\zeta) - \frac{\partial g}{\partial u}(x,u)\nabla u \cdot \zeta.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} w\big(-\operatorname{div}((\operatorname{div}\zeta)\nabla u) + \operatorname{div}(\nabla u(\zeta'^{\top} + \zeta'))\big)\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&\quad = \int_{\Omega_0} w(-\operatorname{div}[\zeta(\Delta u)] + \Delta(\nabla u \cdot \zeta))\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&\quad = \int_{\Omega_0} (\nabla w)(\zeta(\Delta u) - (\nabla(\nabla u \cdot \zeta))^{\top})\,\mathrm{d}\tilde{x}
\end{aligned}$$

Wegen der Dichtheit von $C^3(\Omega_0)$ in $W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap W^{2,p}(\Omega_0)$ gilt diese Gleichung auch für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap W^{2,p}(\Omega_0)$, insbesondere also für u^0. Damit ergibt sich für $\zeta \in C^2(Q;\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle F'_\theta(u^0,0).\zeta, w\rangle = \int_{\Omega_0} w(F'_\theta(u^0,0).\zeta)\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla w \cdot (\zeta\underbrace{(\Delta u^0 - g(x,u^0))}_{=0}) - \nabla w \cdot (\nabla(\zeta\nabla u^0))^{\top} - w\frac{\partial g}{\partial u}(x,u^0)\nabla u^0 \cdot \zeta\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\Omega_0} (\nabla u^0 \cdot \zeta)(\underbrace{(\Delta w - \frac{\partial g}{\partial u}(x,u^0)w)}_{=0}\,\mathrm{d}\tilde{x} - \int_{\partial\Omega_0} (\nabla u^0 \cdot \zeta)\frac{\partial w}{\partial \nu}\,\mathrm{dS}(\tilde{x}) \\
&= -\int_{\partial\Omega_0} (\nabla u^0 \cdot \zeta)\frac{\partial w}{\partial \nu}\,\mathrm{dS}(\tilde{x})
\end{aligned}$$

Da $C^0(Q)$ dicht in $C^2(Q)$ ist, gilt diese Gleichung auch für alle $\zeta \in C^0(Q)^n$.

Nun ist $u^0 \in W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$ und damit $u^0 \in C^1(\bar{\Omega}_0)$. Außerdem ist w als Lösung von (3.10) nach [17, Sect. 3, Thm. 15.1] in $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$ für ein $\alpha \in (0,1]$. Insbesondere ist also $\nabla u^0 \frac{\partial w}{\partial \nu}$ stetig auf $\partial\Omega_0$. Nach dem Forsetzungssatz von Tietze (siehe [9, Satz A.6]) existiert ein $\zeta \in C^0(Q)$ mit $\zeta\big|_{\partial\Omega_0} = \nabla u^0 \frac{\partial w}{\partial \nu}$. Damit ergibt sich

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\nabla u^0|^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{dS}(\tilde{x}) = 0.$$

Wäre $\nabla u^0 = 0$ auf ganz $\partial\Omega_0$, so würde mit $g(x, 0) = 0$ aus dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit [23] folgen, dass $u^0 \equiv 0$ in Ω_0 (vgl. die Argumentation nach Satz 1.23). Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $U = X \setminus \{0\}$. Also ist

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$$

in einer offenen Teilmenge von $\partial\Omega_0$. Mit dem Satz über die Eindeutigkeit für das Cauchy-Problem 1.22 folgt daraus $w = 0$.

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 3.4 erfüllt und die Schlussfolgerung aus Satz 3.2 bzw. Bemerkung 3.3 gilt, d.h. für alle $\theta \in \mathcal{O}$, wobei $\mathcal{O} \subset V$ residuell, ist 0 ein regulärer Wert von $F(., \theta)$. Für alle $\theta \in \mathcal{O}$ und $v \in X$ mit $F(v, \theta) = 0$ ist also insbesondere $F'_v(v, \theta)$ surjektiv und deshalb, da es sich um einen linearen Fredholm-Operator mit Index 0 handelt, auch injektiv. Also sind für $\tilde{A}_\theta := (I + \theta)\tilde{A}$ alle Lösungen der Gleichung (0.1) in $W_0^{1,p}(\tilde{A}_\theta) \cap W^{2,p}(\tilde{A}_\theta)$ nicht-degeneriert. Da die Behauptung für alle θ aus einer residuellen Teilmenge von V gilt, ist es sicher möglich, θ mit $\|\theta\|_{C^2} < \varepsilon$ für beliebig kleines ε zu wählen. $\square$

3.2. Existenz einer Lösung in $\tilde{A}_\theta$ und nahen Gebieten

Als nächstes zeigen wir, dass für $\tilde{A}_\theta$ eine nicht-triviale positive Lösung der Gleichung (0.1) existiert. Dazu werden wir den folgenden Satz von Bahri und Coron anwenden:

Satz 3.6. (Bahri und Coron, [4])
Wenn eine positive ganze Zahl q existiert, sodass $H_q(\Omega; \mathbb{Z}_2) \neq 0$ ist, dann hat das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \ &\textit{in } \Omega, \\ u > 0 \ &\textit{in } \Omega, \\ u = 0 \ &\textit{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine Lösung, die in $C^\infty(\Omega)$ liegt.

Dabei bezeichnet $H_q(\Omega;\mathbb{Z}_2)$ die q-te Homologiegruppe von Ω mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$. Die Definition und wichtigsten Eigenschaften von Homologiegruppen sind in Anhang A nachzulesen.

Es reicht also zu zeigen, dass für das oben konstruierte Gebiet $\tilde{A}_\theta$ ein $q > 0$ existiert, sodass $H_q(\tilde{A}_\theta;\mathbb{Z}_2) \neq 0$ ist. Dazu werden wir ein Resultat aus der Homologietheorie verwenden, das besagt, dass Räume vom gleichen Homotopietyp isomorphe Homologiegruppen haben (siehe dazu [27, Thm. 9.3.3] bzw. Satz A.9).

Nun ist sicher $\tilde{A}_\theta$ vom gleichen Homotopietyp wie $\tilde{A}$, die Homotopieäquivalenz ist einfach der Diffeomorphismus $T = I + \theta$. Des Weiteren ist der Annulus $\tilde{A}$ vom gleichen Homotopietyp wie die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ (wähle als Homotopieäquivalenz z.B. $f : \tilde{A} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ und $g = I$). Also ist $\tilde{A}_\theta$ vom gleichen Homotopietyp wie $\mathbb{S}^{n-1}$.

Nach [27, Bsp. 9.4.12(d)] ist $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ und damit nicht-trivial. Außerdem ergibt sich aus [27, Bsp. 10.6.1], dass $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z}_2) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes \mathbb{Z}_2$ ist und damit $H_{n-1}(\tilde{A}_\theta, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \neq 0$ gilt.

Damit ist die Voraussetzung von Satz 3.6 erfüllt und wir erhalten, dass (0.1) für $\tilde{A}_\theta$ eine nicht-triviale positive Lösung in $C^\infty(\tilde{A}_\theta)$ besitzt. Diese Lösung ist insbesondere in $W_0^{1,p}(\tilde{A}_\theta) \cap W^{2,p}(\tilde{A}_\theta)$ und damit nach Lemma 3.1 nicht-degeneriert. Also existiert eine nicht-triviale, nicht-degenerierte Lösung $u_0 \in C^\infty(\tilde{A}_\theta)$ mit $u_0(x) > 0$ in $\tilde{A}_\theta$.

Sei nun $\Omega_0 = \tilde{A}_\theta$ und K eine gerade Linie in $\tilde{A}_\theta$, die die beiden Komponenten von $\partial\tilde{A}_\theta$ verbindet. Wir definieren Ω_k als $\tilde{A}_\theta$ ohne eine $\frac{1}{k}$-Umgebung von K, wobei wir den Rand glätten, sodass Ω_k in der Klasse C^2 ist (vgl. auch Abbildung 1). Dies ist zulässig für den in Kapitel 2 definierten Konvergenzbegriff:

Lemma 3.7. *Es gilt $\Omega_k \to \Omega_0$ für $k \to \infty$ im Sinne von Definition 2.1.*

Beweis. Wir überprüfen die Bedingungen von Definition 2.1. Die schon gewählte Menge K ist sicher kompakt. Da außerdem K die Dimension 1 hat und $n \geq 3$ ist, folgt aus Satz 1.25, dass K Kapazität 0 im $\mathbb{R}^n$ hat. Des Weiteren kann man hier $E = \emptyset$ wählen. Dann gilt:

(i) Ist K_1 eine kompakte Teilmenge von $\Omega_0 \setminus K$, so gilt für den Abstand von K zu K_1 sicher $\operatorname{dist}(K_1, K) > 0$. Somit existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt, dass $K_1 \subset \Omega_k$ ist.

(ii) Sei U eine offene Umgebung von $\bar{\Omega}_0$. Da nach Konstruktion $\Omega_k \subset \Omega_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist sicher $\Omega_k \subset U$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Da nach Konstruktion Ω_0 mindestens C^2-Rand hat, ist auch die dritte Bedingung erfüllt.

□

Nach Satz 2.2 hat (2.1) eine Lösung u_k nahe u_0, d.h.

$$-\Delta u_k = f(u_k) \text{ in } \Omega_k,\ u_k = 0 \text{ auf } \partial\Omega_k.$$

Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt insbesondere $-\Delta u_k \geq 0$ bzw. $\Delta u_k \leq 0$ in Ω_k. Nach dem schwachen Maximumprinzip [12, Thm. 8.1] ist damit

$$\inf_{\Omega_k} u_k \geq \inf_{\partial\Omega_k} u_k = 0,$$

also $u_k \geq 0$ in Ω_k. Nach dem starken Maximumprinzip [12, Thm. 8.19] gilt sogar $u_k > 0$ in Ω_k. Noch zu beweisen ist jetzt:

Lemma 3.8. *Die Gebiete Ω_k sind homöomorph zu einer Kugel im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Da $\tilde{A}_\theta$ diffeomorph zu $\tilde{A}$ ist, ist Ω_k homöomorph zu $\tilde{A} \setminus \tilde{K}_k$, wobei $\tilde{K}_k$ eine entsprechende $\frac{1}{k}$-Umgebung einer Linie $\tilde{K}$ in $\tilde{A}$ ist (unabhängig davon, ob die Ecken abgerundet sind oder nicht). Die Menge $\tilde{A} \setminus \tilde{K}_k$ wiederum ist homöomorph zu $(\mathbb{S}^{n-1} \setminus Z) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie), wobei Z eine kleine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{S}^{n-1}$ ist. Der Homöomorphismus $f : (\mathbb{S}^{n-1} \setminus Z) \times (0,1) \to \tilde{A} \setminus \tilde{K}_k$ ist gegeben durch

$$f(x,t) = (tR_2 + (1-t)R_1)x, \qquad f^{-1}(\tilde{x}) = \left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}, \frac{\|\tilde{x}\| - R_1}{R_2 - R_1} \right).$$

Des Weiteren ist $\mathbb{S}^{n-1} \setminus Z$ homöomorph zu einer Kugel im $\mathbb{R}^{n-1}$. Betrachte dazu z.B. die stereographische Projektion bzgl. des Nordpols (o.B.d.A. sei Z eine Kugel um den Nordpol). Damit ist $(\mathbb{S}^{n-1} \setminus Z) \times (0,1)$ homöomorph zu $B_1^{(n-1)}(0) \times (0,1)$, was wiederum homöomorph zur offenen Einheitskugel $B_1^{(n)}(0)$ im $\mathbb{R}^n$ ist. Hierbei ist der Homöomorphismus $g : B_1^{(n-1)}(0) \times (0,1) \to B_1^{(n)}(0)$ gegeben durch

$$g(x,t) = (tx_1, \ldots, tx_{n-1}, \sqrt{1-t^2}), \qquad g^{-1}(y) = \left(\frac{(y_1, \ldots, y_{n-1})}{\sqrt{1-y_n^2}}, \sqrt{1-y_n^2} \right).$$

Insgesamt ist also gezeigt: Ω_k ist homöomorph zur Einheitskugel $B_1^{(n)}(0)$.

$\square$

Die Ω_k sind also insbesondere kontrahierbar. Damit sind all ihre Homologiegruppen (bis auf die 0-te) trivial (vgl. [27, Satz 9.3.3] bzw. Satz A.9).

Zusammenfassend haben wir jetzt kontrahierbare Gebiete $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ konstruiert, für die (0.1) eine positive nicht-degenerierte Lösung hat, obwohl sie die Voraussetzung des Satzes von Bahri und Coron 3.6 nicht erfüllen. Dies ergibt das gewünschte Beispiel, das zeigt, dass die Voraussetzung von Bahri und Coron nicht notwendig für die Existenz einer positiven Lösung ist.

A. Homologietheorie

Für den Beweis der Existenz einer positiven Lösung in $\tilde{A}_\theta$ wird Satz 3.6 verwendet, der als Voraussetzung eine nicht-triviale Homologiegruppe verlangt. Für den interessierten Leser werden hier die Definition und die wichtigsten Eigenschaften von Homologiegruppen zusammengefasst. Diese sind aus [27] entnommen.

A.1. Simpliziale Homologiegruppen

Historisch wurden zuerst die geometrisch sehr anschaulichen Homologiegruppen von Simplizialkomplexen eingeführt. Wir rekapitulieren hierfür zunächst die Definitionen von Simplex und Simplizialkomplex (vgl. [27, Def. 3.1.2, 3.1.4, 3.1.6]).

Dazu seien $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$ $q+1$ Punkte in allgemeiner Lage, d.h. die Vektoren $x_1 - x_0, \ldots, x_q - x_0$ sind linear unabhängig. Dann heißt die Punktmenge

$$\sigma = \sigma_q = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1,\; \lambda_0, \ldots, \lambda_q > 0 \Big\}$$

das *(offene) Simplex mit den Ecken* $x_0, \ldots, x_q$ oder das *von* $x_0, \ldots, x_q$ *aufgespannte Simplex*. Wir schreiben $\sigma = (x_0 \ldots x_q)$. Die Zahl q heißt die *Dimension* von σ, und σ heißt ein *q-dimensionales Simplex* oder ein *q-Simplex*. Die Ecken eines Simplex $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ sind nach der Definition eindeutig bestimmt. Sind nun $\sigma,\ \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplexe, so heißt τ *Seite* von σ (Notation $\tau \leq \sigma$), wenn die Ecken von τ auch Ecken von σ sind. Wenn $\tau \leq \sigma$ und $\tau \neq \sigma$ ist, heißt τ *eigentliche Seite* von σ und wir schreiben $\tau < \sigma$. Ein *Simplizialkomplex* K (im $\mathbb{R}^n$) ist eine endliche Menge von Simplexen im $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Aus $\sigma \in K$ und $\tau < \sigma$ folgt $\tau \in K$.

(ii) Aus $\sigma,\ \tau \in K$ und $\sigma \neq \tau$ folgt $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Die 0- bzw. 1-Simplexe von K heißen *Ecken* bzw. *Kanten* von K. Außerdem heißt die Zahl $\dim K = \max\{\dim \sigma : \sigma \in K\}$ die *Dimension* von K.

Auf den Simplexen kann durch die Eckenanordnungen eine Orientierung definiert werden (vgl. [27, Def. 7.1.1]). Dabei heißen zwei Anordnungen *äquivalent*, wenn sie durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen. Eine *Orientierung* von σ_q ist eine

Klasse äquivalenter Eckenanordnungen. Ein *orientiertes Simplex* ist ein Simplex zusammen mit einer festen Orientierung. Ist σ_q ein orientiertes q-Simplex, so schreiben wir $\sigma_q = \langle x_0 \dots x_q \rangle$, wenn $x_0, \dots, x_q$ die Ecken von σ_q sind und wenn die Anordnung $x_0, \dots, x_q$ zur gegebenen Orientierung gehört. Ein 0-Simplex σ_0 ist ein Element x eines euklidischen Raumes, es hat genau eine Orientierung und wir schreiben x statt $\langle x \rangle$. Für $q > 0$ hat ein q-Simplex genau zwei Orientierungen. Ist $\sigma_q = \langle x_0 \dots x_q \rangle$ ein orientiertes Simplex, so heißt $\sigma_q^{-1} = \langle x_1 x_0 x_2 \dots x_q \rangle$ das dazu *entgegengesetzt orientierte Simplex*.

Der entscheidende Punkt der Homologietheorie ist, dass die $(q-1)$-dimensionalen Seitensimplexe eines orientierten q-Simplex in natürlicher Weise orientiert sind. Ist nämlich $\sigma_{q-1} < \sigma_q$ und $x \in \sigma_q$ die Ecke, die nicht zu σ_{q-1} gehört, dann induziert eine Orientierung von σ_q wie folgt eine Orientierung von σ_{q-1}: Wir wählen eine zur gegebenen Orientierung gehörende Anordnung $x, x_1, \dots, x_q$ der Ecken von σ_q, in der x die erste Ecke ist, also $\sigma_q = \langle x x_1 \dots x_q \rangle$, und definieren die *induzierte Orientierung* auf σ_{q-1} durch $\sigma_{q-1} = \langle x_1 \dots x_q \rangle$ (vgl. [27, Def. 7.1.2]). Für ein zweidimensionales Simplex $\sigma_2 = \langle x_0 x_1 x_2 \rangle$ sind zum Beispiel die Seiten mit ihren induzierten Orientierungen gegeben durch $\sigma_1^0 = \langle x_1 x_2 \rangle$, $\sigma_1^1 = \langle x_2 x_0 \rangle$ und $\sigma_1^2 = \langle x_0 x_1 \rangle$. Allgemein ist für ein orientiertes q-Simplex $\sigma_q = \langle x_0 \dots x_q \rangle$ mit $q \geq 2$ das der Ecke x_i gegenüberliegende $(q-1)$-Simplex σ_{q-1}^i mit der induzierten Orientierung gegeben durch $\langle x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_q \rangle^{(-1)^i}$ (vgl. [27, Hilfssatz 7.1.3]). Dabei steht $\langle x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_q \rangle$ abkürzend für $\langle x_0 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_q \rangle$.

Nun können wir auf einem Simplizialkomplex K die sogenannten Kettengruppen definieren (siehe [27, Def. 7.1.4]):

Definition A.1. Es sei K ein Simplizialkomplex. Für $q \in \mathbb{Z}$ ist die *q-te Kettengruppe* $C_q(K)$ von K wie folgt definiert:

(a) Für $q < 0$ und $q > \dim K$ ist $C_q(K) = 0$.

(b) $C_0(K)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von den Ecken von K erzeugt wird.

(c) Für $0 < q \leq \dim K$ ist $C_q(K)$ die von allen orientierten q-Simplexen von K frei erzeugte abelsche Gruppe modulo der Relationen $\sigma_q + \sigma_q^{-1} = 0$, wobei σ_q die orientierten q-Simplexe von K durchläuft. Diese Relation impliziert, dass entgegengesetzt orientierte Simplexe in der Gruppe $C_q(K)$ zueinander invers sind, also $-\sigma_q = \sigma_q^{-1}$. Die Elemente von $C_q(K)$ heißen q-dimensionale Ketten (kurz: q-Ketten) von K.

Eine *freie abelsche Gruppe* ist eine abelsche Gruppe G, die eine *Basis* besitzt, d.h. eine Teilmenge $B \subset G$, sodass alle $b \in B$ unendliche Ordnung haben und G die innere direkte Summe der von den $b \in B$ erzeugten Untergruppen $\mathcal{U}(b) = \{nb : n \in \mathbb{Z}\}$ ist (vgl. [27, Def. 8.1.5]). Die Mächtigkeit von B heißt der *Rang* von G.

Wir wählen nun für jedes q-Simplex des Simplizialkomplexes K eine feste Orientierung und bezeichnen diese orientierten Simplexe mit $\sigma_q^1, \ldots, \sigma_q^{\alpha_q}$, wobei α_q die Anzahl der q-Simplexe von K ist. Dann besitzt jede q-Kette $c \in C_q(K)$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$c = n_q\sigma_q^1 + \cdots + n_{\alpha_q}\sigma_q^{\alpha_q} \text{ mit } n_q, \ldots n_{\alpha_q} \in \mathbb{Z}.$$

Folglich ist $C_q(K)$ frei abelsch vom Rang α_q mit Basis $\sigma_q^1, \ldots, \sigma_q^{\alpha_q}$ (siehe [27, Satz 7.1.5]). Dies ist ein rein algebraisches Konzept, die Ketten in K haben zunächst keine geometrische Bedeutung.

Auf den Kettengruppen definieren wir nun folgenden Operator:

Definition A.2. Es sei $\sigma_q = \langle x_0 \ldots x_q \rangle \in C_q(K)$ ein orientiertes q-Simplex von K. Der *Rand von* σ_q ist die folgende $(q-1)$-Kette von K:

$$\partial\sigma_q = \partial\langle x_0 \ldots x_q \rangle = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots x_q \rangle & \text{für } q > 0, \\ 0 & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

Der *Rand einer beliebigen Kette* $c = \sum\limits_{i=1}^{\alpha_q} n_i\sigma_q^i \in C_q(K)$ ist definiert durch

$$\partial c = \partial\left(\sum_{i=1}^{\alpha_q} n_i\sigma_q^i\right) = \sum_{i=1}^{\alpha_q} n_i\partial\sigma_q^i \in C_{q-1}(K).$$

Der so definierte Homomorphismus $\partial = \partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ heißt *(q-ter) Randoperator* (siehe [27, Def. 7.1.6]).

Der Rand des 2-Simplex $\sigma_2 = \langle x_0x_1x_2 \rangle$ ist zum Beispiel

$$\partial\sigma_2 = \langle x_1x_2 \rangle - \langle x_0x_2 \rangle + \langle x_0x_1 \rangle = \langle x_1x_2 \rangle + \langle x_2x_0 \rangle + \langle x_0x_1 \rangle,$$

also die Summe seiner Seiten. Der Rand der 1-Kette $c = \langle x_0x_1 \rangle + \langle x_1x_2 \rangle + \langle x_2x_0 \rangle$ ist wiederum gegeben durch $\partial c = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_0 - x_2 = 0$.

Mit Hilfe des Randoperators können spezielle Ketten in K beschrieben werden, denen eine geometrische Bedeutung zukommt (siehe [27, Def. 7.1.7]):

Definition A.3. (a) Eine q-Kette $c \in C_q(K)$ heißt *geschlossene q-Kette* oder *q-Zyklus*, wenn der Rand $\partial c = 0$ ist. Die Untergruppe $Z_q(K) = \{c \in C_q(K) : \partial c = 0\} = \ker \partial_q$ von $C_q(K)$ heißt die *q-te Zyklengruppe* von K.

(b) Eine q-Kette $c \in C_q(K)$ heißt *Randkette* (bzw. *berandete Kette* oder *nullhomologe Kette*), wenn es eine Kette $x \in C_{q+1}(K)$ gibt mit $\partial x = c$. Die Untergruppe der berandeten Ketten $B_q(K) = \{c \in C_q(K) : c \text{ ist nulhomolog}\} = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ heißt die *q-te Rändergruppe* von K.

(c) Zwei Ketten $c, c' \in C_q(K)$ heißen *homolog*, wenn $c - c'$ berandet ist. Die *Homologieklasse* $\{c\}$ der Kette $c \in C_q(K)$ ist die Menge aller zu c homologen Ketten:

$$\{c\} = \{c' : c - c' \in B_q(K)\} = \{c + b : b \in B_q(K)\} = c + B_q(K).$$

Wir hatten schon gesehen, dass der Rand des 2-Simplex σ_2 ein Zyklus ist. Tatsächlich gilt immer, dass Ränder Zyklen sind, d.h. für $q \in \mathbb{Z}$ ist die Rändergruppe $B_q(K)$ eine Untergruppe der Zyklengruppe $Z_q(K)$. Es gilt also $\partial\partial c = 0$ für $c \in C_q(K)$ (vgl. [27, Satz 7.1.9]).

Damit können wir nun die Homologiegruppen für Simplizialkomplexe definieren (vgl. [27, Def. 7.1.10]):

Definition A.4. Die Faktorgruppe $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ heißt die *q-te Homologiegruppe* des Simplizialkomplexes K. Ihre Elemente sind für $z \in Z_q(K)$ die Homologieklassen $\{z\} = z + B_q(K)$. Da die Kettengruppe $C_q(K)$ endlich erzeugt ist, ist auch $Z_q(K)$ und somit $H_q(K)$ endlich erzeugt.

Es gilt $H_q(K) \neq 0$ genau dann, wenn es einen q-Zyklus in K gibt, der nicht Rand ist. Die Homologie misst also, wieviel „wesentliche“ (also nicht berandetete) Zyklen es in K gibt.

Für diese Homologiegruppen gibt es eine ganze Theorie mit vielen Resultaten, die die Berechnung von Homologiegruppen vereinfachen. Diese ist in Kapitel 7 von [27] nachzulesen. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen, sondern gleich zur Definition der Homologiegruppen topologischer Räume kommen, für die wir dann einige weitergehende Resultate nennen werden.

A.2. Homologiegruppen topologischer Räume

Die Homologiegruppen topologischer Räume werden auch als singuläre Homologiegruppen bezeichnet, obwohl sie nicht singulär oder entartet, sondern wichtige Invarianzen topologischer Räume sind. Die Namensgebung ist historisch bedingt.

Bevor wir diese Homologiegruppen definieren können, verallgemeinern wir zunächst den Begriff der Kettengruppen aus der Definition simplizialer Homologiegruppen:

Definition A.5. Ein *Kettenkomplex* ist ein System $C = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen C_q und Homomorphismen $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$, sodass $\partial_{q-1} \circ \partial_q : C_q \to C_{q-2}$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ der Nullhomomorphismus ist. Wir schreiben meistens ∂ statt ∂_q und kennzeichnen C durch ein Diagramm

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial} C_{q+1} \xrightarrow{\partial} C_q \xrightarrow{\partial} C_{q-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \qquad (\partial\partial = 0).$$

C_q heißt *q-te Kettengruppe* von C, die Elemente $c \in C_q$ heißen *q-Ketten* von C. Für $c \in C_q$ heißt $\partial c \in C_{q-1}$ der *Rand* von c. Der Homomorphismus $\partial = \partial_q$ heißt *Randoperator* (siehe [27, Def. 8.3.1]).

Für diese allgemeinen Kettenkomplexe kann man nun wie vorher Zyklen-, Ränder- und Homologiegruppen definieren (vgl. [27, Def. 8.3.3]):

Definition A.6. Sei $C = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ein Kettenkomplex. Die Elemente der Untergruppen $Z_q(C) = \ker \partial_q$ bzw. $B_q(C) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ heißen *q-Zyklen* bzw. *q-Ränder* von C. Aus $\partial\partial = 0$ folgt $B_q(C) \subset Z_q(C) \subset C_q$. Die Faktorgruppe $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ heißt *q-te Homologiegruppe* von C. Die Elemente von $H_q(C)$ sind für $z \in Z_q(C)$ die Restklassen $\{z\} = \{z\}_C = z + B_q(C)$ und heißen *Homologieklassen.*

Nun brauchen wir für einen beliebigen topologischen Raum X nur einen Kettenkomplex definieren, durch den dann die Homologiegruppen definiert sind.

Dazu betrachten wir zunächst für eine ganze Zahl $q \geq 0$ das q-dimensionale Standardsimplex im $\mathbb{R}^{q+1}$ (vgl. [27, Def. 9.1.1]): Die Punkte

$$e_0 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_q = (0, \ldots, 0, 1)$$

heißen *Einheitspunkte des* $\mathbb{R}^{q+1}$. Das *abgeschlossene* Simplex mit den Ecken $e_0, \ldots, e_q$

heißt das *q-dimensionale Standardsimplex* Δ_q:

$$\begin{aligned}\Delta_q &= \Big\{x \in \mathbb{R}^{q+1} : x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \text{ mit } 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ und } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\Big\} \\ &= \Big\{(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} : 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ und } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\Big\}.\end{aligned}$$

Das der Ecke e_i gegenüberliegende $(q-1)$-Seitensimplex von Δ_q heißt die *i-te Seite* Δ^i_{q-1} von Δ_q, sie besteht aus allen Punkten $(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Delta_q$ mit $\lambda_i = 0$. Der *Rand* $\partial\Delta_q$ ist die Vereinigung all dieser Seiten, er besteht aus allen Punkten $(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Delta_q$, für die mindestens eine Koordinate Null ist.

Nun gibt es zu beliebigen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{q+1} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(e_i) = x_i$ für $i = 0, \dots, q$, nämlich $f(\lambda_0, \dots, \lambda_q) = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_q x_q$. Die Einschränkung von f auf Δ_q bezeichnen wir mit $[x_0, \dots, x_q] = f|_{\Delta_q} : \Delta_q \to \mathbb{R}^n$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum, der die konvexe Hülle der Punkte $x_0, \dots, x_q$ enthält, so ist $f(\Delta_q) \subset A$. Daher kann man $[x_0, \dots, x_q]$ auch als Abbildung $[x_0, \dots, x_q] : \Delta_q \to A$ auffassen. Wir sagen kurz: $[x_0, \dots, x_q]$ ist *die von der Eckenzuordnung $e_0 \mapsto x_0, \dots, e_q \mapsto x_q$ induzierte lineare Abbildung von Δ_q nach A*. Sie ist durch $x_0, \dots, x_q$ eindeutig bestimmt (vgl. [27, Def. 9.1.2]).

Für $q \ge 1$ und $0 \le i \le q$ sei $\delta^i_{q-1} = [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_q] : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ die von der Eckenzuordnung $e_0 \mapsto e_0, \dots, e_{i-1} \mapsto e_{i-1},\ e_i \mapsto e_{i+1}, \dots, e_{q-1} \mapsto e_q$ induzierte lineare Abbildung (hier stehen links die Einheitspunkte im $\mathbb{R}^q$, rechts die im $\mathbb{R}^{q+1}$). Dabei bildet δ^i_{q-1} den Simplex Δ_{q-1} bijektiv und linear auf die i-te Seite Δ^i_{q-1} von Δ_q ab. Außerdem gilt für $q \ge 2$ und $0 \le k < j \le q$, dass $\delta^j_{q-1} \circ \delta^k_{q-2} = \delta^k_{q-1} \circ \delta^{j-1}_{q-2}$ (siehe [27, Hilfssatz 9.1.3]).

Nun können wir Homologiegruppen für beliebige topologische Räume definieren (siehe [27, Def./Satz 9.1.4]).

Definition und Satz A.7. *Sei X ein topologischer Raum. Ein* singuläres q-Simplex *in X ist eine stetige Abbildung $\sigma = \sigma_q : \Delta_q \to X$. Die* q-te singuläre Kettengruppe $S_q(X)$ *von X ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären q-Simplexen in X erzeugt wird, ihre Elemente heißen* singuläre q-Ketten in X. *Für $q < 0$ setzen wir $S_q(X) = 0$.*

Für $q \geq 1$ sei der Randoperator *der folgende Homomorphismus:*

$$\partial = \partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X),\ \partial\sigma = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma \circ \delta^i_{q-1}).$$

Für $q \leq 0$ sei $\partial_q = 0$. Das System $S(X) = (S_q(X), \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ist ein Kettenkomplex:

$$S(X) : \cdots \xrightarrow{\partial} S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_q(X) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \ldots\ .$$

Er heißt der singuläre (Ketten-)Komplex von X*. Die zugehörigen Homologiegruppen $H_q(S(X))$ heißen die* (absoluten) singulären Homologiegruppen von X*, wir bezeichnen sie mit $H_q(X) = H_q(S(X))$. Für $q < 0$ sind sie Null.*

Wiederum bezeichnen wir mit $Z_q(X) = \ker \partial_q$ bzw. $B_q(X) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ die *q-te Zyklen-* bzw. *Rändergruppe* von X. Es ist also $H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X)$ und die Elemente dieser Gruppe sind die Homologieklassen $\{z\} = \{z\}_X = z + B_q(X)$ mit $z \in Z_q(X)$.

Wir wollen nun betrachten, wie die Homologiegruppen verschiedener topologischer Räume zusammenhängen. Dazu stellen wir fest, dass eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ einen Homomorphismus der Kettengruppen

$$S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y), \quad \sum_\sigma n_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma n_\sigma(f \circ \sigma)$$

induziert. Das System $S(f) = (S_q(f))_{q\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenabbildung $S(f) : S(X) \to S(Y)$ (siehe [27, Def./Satz 9.1.6]). Wir benutzen auch die Bezeichnungen $S_q(f) = f_\bullet : S_q(X) \to S_q(Y)$ und $S(f) = f_\bullet : S(X) \to S(Y)$. Durch $f_* = H_q(f) = H_q(S(f)) : H_q(X) \to H_q(Y)$ induziert f außerdem einen Homomorphismus der Homologiegruppen, wobei $f_*(\{z\}_X) = \{f_\bullet(z)\}_Y$ für einen singulären q-Zyklus z in X ist (vgl. [27, Def. 9.1.8]).

Für einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ sogar ein Isomorphismus, d.h. homöomorphe Räume haben in allen Dimensionen isomorphe Homologiegruppen (vgl. [27, S. 218]). Diese Voraussetzung kann man noch abschwächen, es reicht tatsächlich, dass X und Y vom gleichen Homotopietyp sind, damit sie isomorphe Homologiegruppen haben. Für die Definition von Homotopie siehe Definition 1.19.

Der folgende Homotopiesatz ist eines der Hauptprinzipien der Homologietheorie:

Satz A.8. (Homotopiesatz)
Aus $f \simeq g : X \to Y$ folgt $f_* = g_* : H_q(X) \to H_q(Y)$.

Beweis. Für einen Beweis siehe [27, Satz 9.3.1].

□

Aus diesem Satz folgt sofort:

Satz A.9. *Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ ein Isomorphismus. Insbesondere gilt also: Räume vom gleichen Homotopietyp haben isomorphe Homologiegruppen. Speziell sind kontrahierbare Räume azyklisch, d.h. $H_q(X) = 0$ für $q \neq 0$.*

Beweis. Ein Bewei ist bei [27, Satz 9.3.3] zu finden.

□

Mit Hilfe von weiteren Resultaten der Homologietheorie kann man zeigen, dass

$$H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \ldots \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

und für $0 < q \neq n$ $H_q(\mathbb{S}^n) = 0$ ist (siehe [27, Bsp. 9.4.12(d)]).

A.3. Homologie mit Koeffizienten

Sei nun G eine fest vorgegebene abelsche, additiv geschriebene Gruppe. Wir verallgemeinern die Konstruktionen aus den Abschnitten A.1 und A.2 und erhalten statt der dort definierten Homologiegruppen die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G. Für topologische Anwendungen sind die Fälle $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}_n$ oder $G = \mathbb{R}$ (als additive Gruppe) besonders wichtig.

Wir beginnen wieder mit den Homologiegruppen für Simplizialkomplexe (vgl. [27, S. 253f.]). Eine q-dimensionale Kette c in einem Simplizialkomplex K hat die Form

$$c = n_1\sigma_q^1 + \cdots + n_{\alpha_q}\sigma_q^{\alpha_q} \text{ mit } n_1, \ldots, n_{\alpha_q} \in \mathbb{Z},$$

wobei die σ_q^i die fest orientierten q-Simplexe von K sind. Nun betrachten wir formale Linearkombinationen der Form

$$x = g_1\sigma_q^1 + \cdots + g_{\alpha_q}\sigma_q^{\alpha_q} \text{ mit } g_1, \ldots, g_{\alpha_q} \in G,$$

also q-Ketten von K mit Koeffizienten in G. Dabei soll analog zu Definition A.1 (c) für jedes orientierte Simplex σ positiver Dimension und für alle $g \in G$ die Gleichung

$g\sigma^{-1} = (-g)\sigma$ gelten. Mit der Addition

$$\left(\sum g_i\sigma_q^i\right) + \left(\sum g_i'\sigma_q^i\right) = \sum (g_i + g_i')\sigma_q^i$$

bilden diese Ketten eine Gruppe $C_q(K;G)$, die *q-te Kettengruppe von K mit Koeffizienten in G* (für $q < 0$ und $q > \dim K$ setzen wir $C_q(K;G) = 0$). Die Kettengruppe $C_q(K;G)$ ist isomorph zur direkten Summe $G \oplus \cdots \oplus G$ mit α_q Summanden. Für eine ganzzahlige Kette c wie oben und $g \in G$ ist

$$gc = (n_1 g)\sigma_q^1 + \cdot + (n_{\alpha_q} g)\sigma_q^{\alpha_q} \in C_q(K;G)$$

definiert (die σ_q^i liegen i.A. nicht selbst in $C_q(K;G)$). Den *Rand der Kette x* definieren wir durch

$$\partial x = g_1(\partial\sigma_q^1) + \cdots + g_{\alpha_q}(\partial\sigma_q^{\alpha_q}) \in C_{q-1}(K;G).$$

Damit ist der Randoperator erklärt, und wir erhalten als Kettenkomplex

$$C(K;G): \ \cdots \xrightarrow{\partial} C_q(K;G) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K;G) \xrightarrow{\partial} \ldots \ .$$

Die Gruppen $H_q(K;G) := H_q(C(K;G))$ heißen die *Homologiegruppen von K mit Koeffizienten in G*. Im Fall $G = \mathbb{Z}$ ergibt sich die alte Theorie, d.h. $H_q(K;\mathbb{Z}) = H_q(K)$.

Für die Einführung allgemeiner Homologiegruppen mit Koeffizienten benötigen wir die Definition des Tensorprodukts (siehe [27, Def./Satz 10.2.1]):

Definition und Satz A.10. *Seien A, B abelsche, additiv geschriebene Gruppen, $A \times B$ bezeichne das kartesische Produkt der Mengen A und B. Weiterhin sei $F(A \times B)$ die von der Menge $A \times B$ frei erzeugte abelsche Gruppe und $R(A \times B) \subset F(A \times B)$ sei die Untergruppe, die von allen Elementen der Form*

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \ (a, b + b') - (a, b) - (a, b') \ \textit{mit } a, \ a' \in A, \ b, \ b' \in B$$

erzeugt wird. Die Faktorgruppe $A \otimes B = F(A \times B)/R(A \times B)$ heißt das Tensorprodukt von A und B. *Für $a \in A$ und $b \in B$ bezeichnet*

$$a \otimes b = (a, b) + R(A \times B) \in A \otimes B$$

die vom Element $(a,b) \in F(A \times B)$ repräsentierte Restklasse. Es gilt

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b \text{ und } a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'.$$

Daher ist für $n \in \mathbb{Z}$ auch $(na) \otimes b = a \otimes (nb) = n(a \otimes b)$. Jedes Element $z \in A \otimes B$ hat eine (i.A. nicht eindeutig bestimmte) Darstellung der Form

$$z = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_k \otimes b_k$$

mit $k \geq 1$, $a_i \in A$, $b_i \in B$.

Sind $f : A \to A'$ und $g : B \to B'$ Homomorphismen abelscher Gruppen, so wird durch $(a,b) \mapsto f(a) \otimes g(b)$ eine bilineare Abbildung $A \times B \to A' \otimes B'$ definiert, die einen Homomorphismus $f \otimes g : A \otimes B \to A' \otimes B'$ mit $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b)$ induziert. Dieser wird das *Tensorprodukt von f und g* genannt (vgl. [27, Def. 10.2.2]).

Für allgemeine Kettenkomplexe ergibt sich nun (vgl. [27, Def. 10.4.1]):

Definition A.11. Ist C ein Kettenkomplex und G eine abelsche Gruppe, so bezeichnen wir mit $C \otimes G$ den Kettenkomplex

$$C \otimes G : \ \cdots \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} C_q \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} C_{q-1} \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} \ldots \ .$$

Die Homologiegruppen $H_q(C \otimes G)$ heißen *Homologiegruppen mit Koeffizienten in G*.

Der oben definierte Kettenkomplex $C(K;G)$ ist isomorph zu $C(K) \otimes G$, der entsprechende Isomorphismus ist $g\sigma \mapsto \sigma \otimes g$. Für einen topologischen Raum X ist $H_q(X;G) = H_q(S(X) \otimes G)$ die *q-te Homologiegruppe von X mit Koeffizienten in G*. Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir $f_* = (f_\bullet \otimes \mathrm{id})_* : H_q(X;G) \to H_q(Y;G)$ (vgl. [27, Def. 10.5.1]). Nach [27, Satz 10.5.5] gelten die Hauptprinzipien der simplizialen bzw. singulären Homologietheorie, also insbesondere der Homotopiesatz und seine Folgerung auch für Homologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten.

Wenn $H_{q-1}(X)$ frei abelsch ist, hat man außerdem einen natürlichen Isomorphismus $\lambda : H_q(X) \otimes G \to H_q(X;G)$ durch $\{x\} \otimes g \mapsto \{x \otimes g\}$ (vgl. [27, Bsp. 10.6.1]). Damit ist insbesondere die n-te Homologiegruppe der Sphäre $\mathbb{S}^n$ nicht-trivial, da

$$H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}_2) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \otimes \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2.$$

Literatur

[1] Agmon, S. ; Douglis, A. ; Nirenberg, L.: Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 12 (1959), S. 623–727

[2] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. 6., überarbeitete Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012

[3] Ambrosetti, A. ; Arcoya, D.: *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*. Birkhäuser Boston, 2011

[4] Bahri, A. ; Coron, J. M.: On a Nonlinear Elliptic Equatoin Involving the Critical Sobolev Exponent: The Effect of the Topology of the Domain. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 41 (1988), S. 253–294

[5] Dancer, E. N.: A Note on an Equation with Critical Exponent. *Bulletin of the London Mathematical Society* 20 (1988), S. 600–602

[6] Dancer, E. N.: The Effect of Domain Shape on the Number of Positive Solutions of Certain Nonlinear Equations. *Journal of Differential Equations* 74 (1988), S. 120–156

[7] Dancer, E. N. ; Schmitt, K.: On Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (1987), S. 445–452

[8] Dieudonné, J.: *Grundzüge der moderenen Analysis*. Bd. 1. 3. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1985

[9] Dobrowolski, M.: *Angewandte Funktionalanalysis : Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. 2., korrigierte und überarbeitete Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010

[10] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*. 2. Auflage. American Mathematical Society, 2010

[11] Folland, G. B.: *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1976

[12] Gilbarg, D. ; Trudinger, N. S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. – Reprint of the 1998 edition

[13] Grunau, H.-C.: *Variationsmethoden*. 2013/2014. – Vorlesungsmanuskript, Universität Magdeburg

[14] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002

[15] Henry, D.: *Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005

[16] Kinderlehrer, D. ; Stampacchia, G.: *An Introduction to Variational Inequalities*. Academic Press, Inc. New York, 1980

[17] Ladyzhenskaya, O.A. ; Uralceva, N.N.: *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press Inc., 1968

[18] Maz'ja, V.: *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985

[19] Müller, V.: *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*. Birkhäuser Verlag AG, 2007

[20] Moser, J.: A New Proof of De Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), S. 577–591

[21] Murat, F. ; Simon, J.: Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique. *Publications du Laboratoire Associé n° 189, Université Paris VI,* n° 76015 (1976)

[22] Pohozaev, S.: Eigenfunctions of the Equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Doklady Mathematics* 6 (1965), S. 1408–1411

[23] Protter, M. H.: Unique Continuation for Elliptic Equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 95 (1960), S. 81–91

[24] Saut, J. ; Temam, R.: Generic Properties of Nonlinear Boundary Value Problems. *Communications on Partial Differential Equations* 4 (1979), S. 293–319

[25] Schwartz, L.: *Functional Analysis*. Courant Institute of Mathematical Sciences New York, 1964

[26] Smale, S.: An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem. *American Journal of Mathematics* 87 (1965), S. 861–866

[27] Stöcker, R. ; Zieschang, H.: *Algebraische Topologie*. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. B. G. Teubner Stuttgart, 1994

[28] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. 7., korrigierte und erweiterte Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011