Was die Mathematik vom Wasser lernen kann
– Mathematik ist die Kunst, das Komplizierte einfach zu sehen –

Hans-Christoph Grunau

Wasser ist belebend und anregend, in jeder Hinsicht. Millionen Menschen verbringen ihren Urlaub am Meer oder an Seen; darunter auch viele Freizeitangler, die oft Stunden scheinbar ohne jede Aktivität verbringen. Immer beliebter werden Flusskreuzfahrten, während derer man über meist träge und ruhig dahin strömendes Wasser meditieren kann. Besonders attraktiv sind aber auch Wasserfälle wie z.B. der Rheinfall in Schaffhausen (Abbildung 1). Die Vielfalt von Beobachtungen im Zusammenhang mit strömendem Wasser hat stets auch die Wissenschaft stark beeinflusst. Gerade im Zusammenhang mit turbulenten Strömungen (Wasserfälle!) sind in Mathematik und Physik noch heute viele grundlegende Fragen ohne befriedigende Antwort. Für die Lösung einer besonders schwierigen und fundamentalen dieser Aufgaben ist sogar ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgesetzt.

Abbildung 1: Herausforderung: Modellierung turbulenter Strömungen?

Aber auch Wasser, das in Ruhe ist oder sich bestenfalls in Zeitlupentempo bewegt, hat die Mathematik stark inspiriert, und darum soll es in diesem Beitrag gehen. Bei einer Wanderung in den Zermatter Bergen lädt der Riffelsee (Abbildung 2) zu einer Pause ein. Mathematiker beginnen beim Anblick einer solchen Szenerie sofort nachzudenken: Warum sammelt sich das Wasser hier? Die Erklärung ist denkbar einfach: Hier ist eine Senke im Boden! Und wie kommt das Wasser dorthin? Ein Blick in die Bergwelt hilft weiter: Die Gletscher zeigen es im Zeitlupentempo (Abbildung 3). Wasser, auch im gefrorenen Zustand als Eis, wählt immer den direkten Weg bergab.

Von diesen Beobachtungen ausgehend soll eine Brücke geschlagen werden zu einem Teilgebiet der angewandten Mathematik, der sogenannten „Variationsrechnung". Eine für diese Disziplin typische Fragestellung, an deren Beantwortung auch an der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg gearbeitet wird, soll im Folgenden vorgestellt werden. Dabei soll erläutert werden, wie sich die Beobachtungen des bergwandernden Mathematikers in eine Lösungsstrategie umsetzen lassen.

Um das grundlegende Prinzip zu verstehen und zu formulieren, das für die Existenz des Riffelsees an genau der Stelle verantwortlich ist, besteht der erste Schritt darin, die Beobachtungen

Abbildung 2: Wo bilden sich Seen, wo nicht?

Abbildung 3: Wo fließt das Wasser hin?

auf den wesentlichen Kern zu reduzieren und mit möglichst vielen weiteren Erfahrungen in Verbindung zu setzen. Jedermann ist durch alltägliche Erfahrung vertraut, was in einem einfachen Wohnzimmer-Experiment mit Hilfe einer vorübergehend umgewidmeten Obstschale nachgestellt wird: siehe Abbildung 4.

 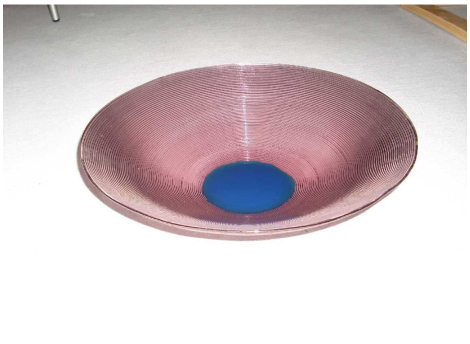

Abbildung 4: Wohnzimmerexperiment

Es steht fest: Wasser sammelt sich stets an der tiefsten Stelle! Und warum ist das so? Dadurch wird die Energie des Wassers soweit wie möglich minimiert. Es kostet Energie, Dinge gegen die Erdanziehungskraft „auf die Höhe" zu bringen. Und möglichst viel von dieser Energie wird wieder frei, wenn das Wasser sich soweit wie möglich nach unten bewegt. Bevor dieses physikalische Prinzip an einem weniger einfachen Beispiel weiterverfolgt wird, soll es zunächst genauer durchdacht werden. Man erkennt, dass das Experiment mit der Schale durch einen Abstraktionsschritt mathematisch modelliert werden kann: Die Ähnlickeit der vom Computer mit Hilfe eines Mathematikprogramms erzeugten Abbildung 5 mit dem Wohnzimmerexperiment (Abbildung 4) liegt auf der Hand.

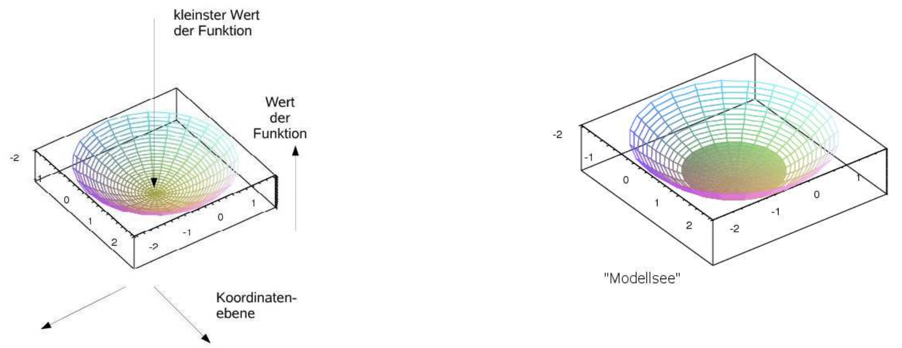

Abbildung 5: Mathematisches Modell

Das mathematische Modell beschreibt das Experiment sehr gut und hat den Vorteil, dass es nun Berechnungen – d.h. berechenbare Vorhersagen – ermöglicht. Die Position des „Wohnzimmersees“ lässt sich leicht voraussagen, indem man den kleinsten Wert der Funktion in Abbildung 5 berechnet: Wo ist die Höhe in der Grafik über der waagerecht darunter liegenden „Koordinaten-“Ebene so klein wie möglich? Manch einer wird sich an das Thema „Kurvendiskussion“ im Schulunterricht erinnern.

Nun bedarf es nur noch eines weiteren Abstraktionsschrittes, um scheinbar ganz andere Fragen behandeln zukönnen. Viele Mathematiker beschäftigen sich gegenwärtig damit, Modelle für elastische Flächen zu untersuchen. Elastisches Material ist z.B. Metall oder geeignet bearbeitetes Holz. Um solche Flächen (Platten, Latten oder Bretter) zu verformen, muss man Energie aufwenden. Bei elastischem Material kann man diese Energie bei Entspannung, d.h. Rückkehr in den Ausgangszustand, zurückgewinnen. Spielzeuge wie Katapulte oder Trampoline, Sprungbretter, Schwingsessel, Fahrzeugfederungen und vieles mehr funktionieren nach diesem Prinzip. Jedem ist das Beispiel eingespannter elastischer Hölzer vom Lattenrost des eigenen Bettes vertraut. Hier wird auch deutlich, dass die Latten unbelastet, d.h. im Gleichgewichtszustand, durch die Einspannung vorgebogen sind. Bei Belastung und damit Aufwendung von Energie nehmen die Latten eine andere Form an, bei Entlastung kehren sie in ihren ursprünglichen Zustand zurück.

Mathematiker arbeiten daran, die Existenz von Gleichgewichtsfiguren solcher elastischer Flächen zu beweisen und diese dann auch mit Hilfe eines Computers zu berechnen. Letzteres macht unmittelbar Sinn, denn es spart viel Material und Geld, wenn man Experimente virtuell am Computer durchführen kann. Und damit diese Modelle und Berechnungen nicht auf Sand gebaut sind, sondern zuverlässige Berechnungen und Vorhersagen gestatten, klärt der theoretisch arbeitende Mathematiker vorab Existenz und Eigenschaften von diesen Gleichgewichtszuständen. Deren Gestalt liegt wie beispielsweise bei den eingespannten Latten im Lattenrost oder eingespannten Blattfedern meist keineswegs auf der Hand: man muss entweder ausprobieren oder man kann mit Hilfe kluger Modelle theoretische Vorhersagen wagen. Dabei legt man, so wie bei den Beobachtungen beim Wasser, die Regel zu Grunde: Gleichgewichte eingespannter elastischer Platten stellen sich so ein, dass die Verformungsenergie unter allen zulässigen Verformungen denkbar klein wird.

Und der Mathematiker, wieder das Bild vom Zermatter Riffelsee vor Augen, stellt sich die Situation bei elastischen Flächen so vor: Jeden Verformungszustand denkt man sich als Punkt in der Koordinatenebene und berechnet dazu die Verformungsenergie. Diese trägt man als Höhe über dem entsprechenden Punkt in der Ebene auf und so entsteht das Energiegebirge: „Gipfel“ bedeuten, dass sehr viel Energie nötig ist, um solche Zustände zu erzeugen, d.h. große Verformungen. Und Täler entsprechen Zuständen mit kleiner Energie, d.h. ziemlich kleinen Verformungen. Und den Gleichgewichtszustand des elastischen Körpers, d.h. den Zustand mit kleinstmöglicher Energie findet man wie das Wasser die Senke im Gebirge! Man startet irgendwo, d.h. mit einem willkürlichen Ausgangszustand eines Körpers, und überlegt sich, wie man Schritt für Schritt die Energie desselben verringert. Solange, bis es nicht mehr weiter geht und man im „Energiesee“ angekommen ist. Hier ist die Energie des Körpers kleinst möglich, man hat seinen elastischen Gleichgewichtszustand gefunden! Diese Strategie wird in der Theorie mit großem Erfolg verwendet. Und Simulationen mit Hilfe von Computern funktionieren genauso: Abbildung 6 zeigt das mit Hilfe eines Computers berechnete Gleichgewicht eines symmetrischen elastischen Körpers, der an seinen Rändern fest eingespannt wird. Die benutzte Methode heißt Willmore-„Fluss“. Mit

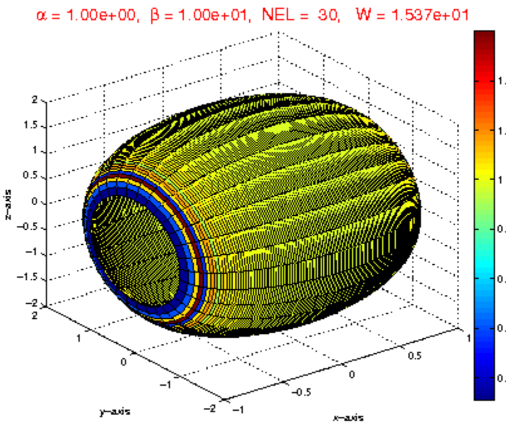

Abbildung 6: Berechnete Lösung (Friedhelm Schieweck): Eingespannte elastische Fläche

dieser Bezeichnung knüpft man direkt an das Bild vom Riffelsee und dem dorthin strömenden Wasser an. Bilder vom Energiegebirge und dem darin verlaufenden Willmore-„Fluss“ können die Mathematiker jedoch nur noch in ihren Köpfen entwickeln: Grafiken kann man nicht mehr erstellen! Dazu wäre „unendlich dimensionales“ Papier erforderlich.

So einfach funktioniert Mathematik? Was die Grundideen betrifft: Ja! Die exakte Umsetzung bezogen auf konkrete Probleme ist aber mitunter sehr sehr schwierig. Die hier beschriebene Grundidee geht schon auf Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange zurück und ist damit 250–300 Jahre alt. Das mathematische Fundament zur Umsetzung dieser Idee konnte aber erst im 20. Jahrhundert gelegt werden; und in den letzten 50 Jahren sind viele solcher Minimierungsaufgaben gelöst worden. Das konkrete Beispiel der Untersuchung elastischer Flächen ist jedoch ein ganz aktueller Forschungsgegenstand und kann erst in Spezialfällen als gelöst betrachtet werden.

Es gibt eben doch einen wichtigen Unterschied zwischen dem Fließen von Wasser und dem Lösen mathematischer Probleme: Wasser findet das Tal von allein, Mathematiker müssen mitunter aber sehr lange nachdenken, um den rechten Weg ins „Energietal“ zu finden. Und sie dürfen sich dabei nicht versehentlich im Unendlichen verlaufen. Aber immerhin zeigt die Beziehung von Wasser-Fluss und Willmore-„Fluss“: Mathematik ist die Kunst, Kompliziertes einfach – so einfach wie möglich – zu sehen.